Lehrbuch der Arithmetik

von

Dr. F. USTRICH
Bürgerschuldirektor.

Dritte Auflage

MÜNCHEN.
J. Lindauer'sche Buchhandlung
(Schöpping).

Ustrich.

Lehrbuch

der

Arithmetik

für

Gymnasial-, Real-, Bürger-

und

gewerbliche Fortbildungs-Schulen

von

Dr. Friedrich Ustrich,

Bürgerschuldirektor.

Dritte verbesserte und erweiterte Auflage.

München.

J. Lindauer'sche Buchhandlung (Schöpping).

1895.

Vorrede.

Mit dem vorliegenden Leitfaden der Arithmetik, welcher den Zweck hat, das zeitraubende Diktieren zu vermeiden, glaube ich, die Grundzüge der Arithmetik als Unterrichtsgegenstand an humanistischen und technischen Lehranstalten in ein systematisches Ganze gebracht zu haben. Bei Abfassung desselben waren Weckung und Schärfung des Verstandes, dann Anwendung des Verstandenen die leitenden Gesichtspunkte und habe ich mein Augenmerk genau darauf gerichtet, allen mechanischen Gedächtniskram zu beseitigen, um die Schüler zum Denken, der Hauptaufgabe jeden Unterrichtes, anzuhalten. Überhaupt war ich von dem Gedanken beseelt, ein gründliches, den Geist anregendes und fruchttragendes Rechnen zu fördern. In wie weit ich Zweck und Absicht, etwas Notwendiges und Unentbehrliches zu schaffen, erreicht habe, überlasse ich getrost der geneigten Beurteilung meiner Herren Kollegen mit der Erklärung, daß mir berichtigende Notizen zu meinem Buche stets willkommen sind und seiner Zeit die geeignete Berücksichtigung finden werden.

Arithmetik, ist die Grundlage der gesamten Mathematik! Nur ihr richtiges Verständnis, nur ihr gründliches Wissen läßt mit Erfolg die Stufenleiter der verschiedenen mathematischen Zweige erklimmen. Dem Inhalte nach will mein Buch, das ein **Sammelwerk** ist, nichts Neues bieten, aber in Anordnung und Behandlung des Lehrstoffes, namentlich aber durch seine Kürze dürfte sich dieser Leitfaden von vielen andern, durch ihren Umfang für den Unterricht unpraktischen Lehrbüchern der Arithmetik zu seinem Vorteile unterscheiden.

Die als bestbekannten Werke von **Hoffmann, Dr. Hauck, Dr. Schellen, Knieß & Bachmann, Findeisen, Haesters, Brenner, Immel, Rumbke, Schwager, Steck & Dr. Bielmayr, Dr. Klein-**

paul 2c. waren meine Quellen; meine mehrjährige Lehrthätigkeit gab manch trefflichen Wink. Daß die Beweise für die einzelnen Lehrsätze manchmal nur ausführlicher, manchmal nur andeutungsweise gegeben sind, kann mir nicht zum Vorwurfe gemacht werden; denn einerseits wäre durch eine weitere Ausführung aller Beweise der Umfang des Buches allzusehr gewachsen, anderseits wird es dem Schüler leicht sein, aus den gegebenen Andeutungen bei geeigneter Nachhilfe des Lehrers die Beweise selbst auszuführen.

Nachdem ein anregender und wahrhaft fördernder Unterricht in der Arithmetik unbestritten die Lösung zahlreicher Aufgaben erfordert, so habe ich, einesteils für die Schüler der meiner Leitung unterstellten Bürgerschule dahier, anderenteils vielfach ausgesprochenen Wünschen entsprechend, den Hauptlehrer an der Bürgerschule, Herrn Jakob Pfeiffer veranlaßt, im engen Anschlusse an mein Lehrbuch, welches durch höchste Entschließung des Kgl. Staatsministeriums für Kirchen- und Schulangelegenheiten vom 20. Sept. 1874 E.-N. 5854 (Siehe K. M.-Bl. Nr. 1874 pag. 432) unter die gebilligten Lehrbücher aufgenommen wurde, eine Aufgabensammlung zusammenzustellen.

Möge mein Lehrbuch, das ich hiemit als Sammelwerk in der uneigennützigsten Absicht getrost in die Öffentlichkeit schicke, eine wohlwollende Aufnahme finden und seinen Zweck in bestem Maße erfüllen!

München, im November 1894.

Dr. Friedrich Ustrich.

Inhalts-Verzeichnis.

Erster Teil.

Zweiter Teil.

Druck von Dr. Franz Paul Datterer in Freising.

Erster Teil.

Einleitung.

Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und Zahlenverbindungen.

Unter einer **Zahl** versteht man sowohl **die Einheit** (1), als auch eine **bestimmte Menge** von unter sich gleichen Einheiten, z. B. 5, 7 ꝛc.

Zahlen heißen **unbenannt,** wenn die Art der Einheiten nicht näher bezeichnet ist, z. B. 4 Einheiten oder 4.

Zahlen heißen **benannt,** wenn die Art der Einheiten genauer bestimmt ist, z. B. 7 Einheiten von 7 Mark oder kurzweg 7 Mark.

Zahlen von **derselben Benennung** heißen **gleichartig,** z. B. 2 Mark und 5 Mark.

Zahlen von **ungleicher Benennung** heißen **ungleichartig,** z. B. 2 Mark und 5 Francs.

Aus bekannten oder gegebenen Zahlen durch gewisse Veränderungen derselben (Operationen) andere unbekannte Zahlen aufsuchen, heißt **rechnen.**

1. Numerieren.

Unter **Numerieren** versteht man eine doppelte Verrichtung:

1) **jede in Ziffern gegebene Zahl auszusprechen,**

2) **jede ausgesprochene Zahl mit Ziffern zu schreiben.**

Um die Zahlen auszudrücken, hat man Wörter und Zeichen notwendig. Die Wörter nennt man **Zahlwörter,** die Zeichen **Zahlzeichen** oder **Ziffern.** Jede Ziffer hat einen **doppelten Wert** und zwar ihren **ursprünglichen Wert (Nominal- oder Nennwert),**

welcher die Menge der Einheiten ausdrückt und den **Lokal-** oder **Stellenwert**, der ihr vermöge ihrer Stellung zukommt.

Zur Ausfüllung unbesetzter Stellen bedient man sich der **Null** (0).

Vorhergehende Zahlen mit Einschluß der 0 reichen aus, um alle möglichen Zahlen auszudrücken.

Dieses auf der Zahl **10** beruhende System des Numerierens heißt das **dekadische System** (Decimalsystem).

Das dekadische System besteht in seiner Grundeigenschaft darin, daß **zehn Einheiten einer niederen Ordnung immer eine Einheit einer höheren Ordnung geben.**

Beispiele: Aufgabensammlung Seite 1.

Die römischen Zahlen.

Die Römer, welche kein so wissenschaftlich gebildetes Zahlsystem wie wir hatten, bedienten sich zum Schreiben aller Zahlen von 1—1000 folgender Zahlzeichen, die sie ihrem **Alphabete** entnommen hatten:

I	=	1	XI	=	11	XXI	=	21	CC	=	200
II	=	2	XII	=	12	XXX	=	30	CCC	=	300
III	=	3	XIII	=	13	XL	=	40	CD	=	400
IV	=	4	XIV	=	14	L	=	50	D	=	500
V	=	5	XV	=	15	LX	=	60	DC	=	600
VI	=	6	XVI	=	16	LXX	=	70	DCC	=	700
VII	=	7	XVII	=	17	LXXX	=	80	M	=	1000
VIII	=	8	XVIII	=	18	XC	=	90	MI	=	1001
IX	=	9	XIX	=	19	C	=	100	VM	=	5000
X	=	10	XX	=	20	CI	=	101	XM	=	10000
									CM	=	100000

Hieraus ersieht man, daß man bei den römischen Ziffern eine **Vielheit** entweder durch **Addition** (Aneinanderreihung der einzelnen Einheiten), z. B. III = 3; CCC = 300; MM = 2000 oder durch **Subtraktion** gewinnt. Letzteres geschieht dadurch, daß man niedere Einheiten vor höhere stellt, z. B. IV = 4; IX = 9; XL = 40; XC = 90; CD = 400; CM = 900. Endlich gewinnt man eine **Vielheit** auch noch durch **Multiplikation**, z. B. VM = 5000; VIIM = 7000.

Die römischen Zahlzeichen finden jetzt nur mehr Anwendung auf Uhren, Überschriften, als Ordnungszahlen bei Regentennamen und bei anderen Einteilungen und öfters auch noch bei Jahreszahlen.

Die Griechen gebrauchten ihre Buchstaben als Zahlzeichen.

Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 132 und 133.

2. Unbenannte ganze Zahlen.

Jede Zahl kann einer doppelten Veränderung unterworfen werden, der **Vermehrung** und der **Verminderung**; erstere wird bewirkt durch **Addition** und **Multiplikation**, letztere durch **Subtraktion** und **Division**.

Wir unterscheiden demnach vier Grundrechnungsarten (species) nämlich: **Addition**, **Subtraktion**, **Multiplikation** und **Division**.

I. Addition.

Zwei oder mehrere Zahlen addieren heißt eine neue Zahl suchen, welche ebensoviele Einheiten enthält, als die gegebenen Zahlen zusammen.

Die Zahlen, welche addiert werden sollen, heißen **Summanden**, oder **Posten**, das Resultat der Addition heißt **Summe**.

Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz (+), und wird gelesen plus. Durch dieses Zeichen werden die **Summanden** und mit diesen durch das Gleichheitszeichen („=“) die **Summe** verbunden.

5 + 7 (ausgesprochen 5 plus 7) = 12

formelle **wirkliche**

Summe

5 + 7 sind die **Summanden** oder **Posten**.

Anm. 1. In jeder Summe lassen sich die Summanden beliebig vertauschen.

$$5 + 7 + 6 + 3 = 3 + 6 + 7 + 5 = 21.$$

Anm. 2. $8 + 0 = 8$.

Anm. 3. Bei der Addition von größeren Zahlen schreibt man die Zahlen gewöhnlich untereinander und zwar Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w., z. B.

$$156 + 3781 + 19023 = 22960$$

oder

156
3781
19023
22960

Anm. Um den Lokal- oder Stellenwert der einzelnen Ziffern klar zu legen, kann die vorstehende Addition auch auf folgende Art ausgeführt werden.

156	
3871	
19023	
10000	Summe der Zehntausender.
12000	Summe der Tausender.
800	Summe der Hunderter.
150	Summe der Zehner.
10	Summe der Einer.
22960	Gesuchte Summe (Totalsumme).

Anm. Um die Richtigkeit der ausgeführten Addition zu kontrollieren, addiert man zur größeren Sicherheit die Summanden einmal aufwärts und einmal abwärts.

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 2, 3 und 4.

II. Subtraktion.

Von einer Zahl eine zweite Zahl subtrahieren heißt, bestimmen, wie viele Einheiten die eine mehr zählt, als die andere, oder kurz, den Unterschied (die Differenz) zweier Zahlen suchen.

Zwei Zahlen subtrahieren heißt auch, eine dritte Zahl suchen, welche zur zweiten addiert die erste als Summe gibt.

Diejenige Zahl, welche vermindert oder von der abgezogen werden soll, heißt **Minuend** oder **Vollzahl;** diejenige Zahl welche abgezogen oder hinweggenommen werden soll, heißt **Subtrahend** oder **Abzugszahl.** Das Resultat der Subtraktion heißt **Unterschied, Rest** oder **Differenz.**

Minuend oder Subtrahend werden durch das Subtraktionszeichen (—), welches weniger oder minus gelesen wird, unter sich und mit der Differenz durch das Gleichheitszeichen verbunden.

Z. B. **Minuend — Subtrahend = Differenz**
96 — 64 = 32

96 **Minuend (Vollzahl)**
64 **Subtrahend (Abzugszahl)**
32 **Differenz (Rest oder Unterschied)**

96 — 64 = 32

formelle reelle (wirkliche) Differenz.

Anm. 8 — 0 = 8
8 — 8 = 0

Wie bei der Addition von größeren Zahlen schreibt man auch bei der Subtraktion die Zahlen gewöhnlich unter einander und zwar Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w. Ist an einer einzelnen Stelle der Minuend kleiner als der Subtrahend, so nimmt man von der nächst höheren Stelle und, wenn an dieser ein Null steht, von der zweit höheren u. s. f. eine Einheit herüber und zerlegt sie in Einheiten niedrigerer Ordnung. Z. B

78100 Minuend	9489	Rechne 2 von 9 bleibt 7
69423 Subtrahend	— 1352	5 „ 8 „ 3
8677 Differenz	8137	3 „ 4 „ 1
		1 „ 9 „ 8

Probe der Addition und Subtraktion.

a) Die Probe der Addition ist die Subtraktion.

Die Regel lautet:

Man läßt einen beliebigen Summanden weg, addiert die übrigen Summanden, subtrahiert die zweite Summe **(Teilsumme)** von der ursprünglichen **(Hauptsumme)**, so muß, wenn die Rechnung richtig ist, der **weggelassene Summand** als **Differenz** erscheinen.

Z. B. 12 + 18 + 24 + 36 = 90.

12
18
24
36
90 Totalsumme (Hauptsumme)
78 Partialsumme (Teilsumme)
12 weggelassene Summand.

b) Die Probe der Subtraktion ist die Addition.

Die Regel der Subtraktion lautet:

1) Subtrahend + Differenz = Minuend
2) Minuend — Differenz = Subtrahend

also in dem Beispiele 9 — 2 = 7

	Differenz	+	Subtrahend	=	Minuend
1)	7	+	2	=	9

	Minuend	—	Differenz	=	Subtrahend
2)	9	—	7	=	2

Auf der Eigenschaft, daß Subtrahend plus Differenz gleich Minuend, beruht das Subtraktionsverfahren durch Ergänzung oder das Subtrahieren ohne Borgen durch Daraufzählen. Man verfährt dabei wie bei uns der Detaillist, wenn er z. B. zur Bezahlung auf 65 Pf. eine Mark erhält und den Rest herausgeben soll. Er legt dann zuerst 5 Pf. hin und sagt: „Das sind 70 Pf." und legt nun noch 30 dazu.

Die Ausführung entspricht also ganz dem Verfahren der Probe, z. B.

9489	Man spricht:	„2	und	(7)	sind	9
— 1352		5	„	(3)	„	8
8137		3	„	(1)	„	4
		1	„	(8)	„	9.

Während die in ( ) gesetzte Zahl gesprochen wird, schreibt man sie zugleich an ihre Stelle.

Anm. Dieses anscheinend schwierigere Verfahren ist sehr vorteilhaft, um später die Division rasch ausführen zu können.

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 4, 5 und 6.

III. Multiplikation.

Zwei Zahlen multiplizieren heißt, die eine so oft als Summand setzen, als die andere angibt, oder die eine so oftmal nehmen, als die andere Zahl Einheiten hat.

z. B. 7 . 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28.

Das Zeichen der Multiplikation ist entweder ein liegendes Kreuz (X) oder ein Punkt (.).

Hieraus ergibt sich, daß die **Multiplikation** eigentlich nur eine **abgekürzte Addition** von **lauter gleichen Summanden oder Posten** ist. Die Zahl, welche öfters als Summand gesetzt oder genommen werden soll, heißt **Multiplikand;** diejenige Zahl, welche angibt, wie oft der Multiplikand als Summand gesetzt oder genommen werden soll, heißt **Multiplikator.** Beide Zahlen **Multiplikand** und **Multiplikator** haben auch den gemeinsamen Namen **Faktoren.** Das **Resultat** der Multiplikation heißt **Produkt.**

Multiplikand und Multiplikator werden durch das Multiplikationszeichen (X oder .), welches **mal** gelesen wird, unter sich und mit dem Produkte durch das Gleichheitszeichen verbunden, z. B.

7 . 4 = 28

Faktoren

Multiplikand **Multiplikator**

7 . 4 = 28

formelles wirkliches Produkt.

7 . 4 = 4 . 7. Hieraus folgt der Satz: **in jedem formellen Produkte lassen sich die Faktoren beliebig vertauschen.**

3217 . 612 =

	I. Art		II. Art	
	3217 Multiplikand	Faktoren	3217	
	. 612 Multiplikator		. 612	
Teilprodukt	6434	= 3217 . 2	1930200	= 3217 . 600
	3217	= 3217 . 10	32170	= 3217 . 10
	19302	= 3217 . 600	6434	= 3217 . 2
Hauptprodukt	1968804		1968804	

Einige Vorteile bei der Multiplikation.

1) Multiplikation mit einer Zahl, welche eine Eins

a) in der Einerstelle

b) in der höchsten Stelle hat.

In diesen beiden Fällen erspart man das nochmalige Niederschreiben der Ziffern des Multiplikanden.

a) 8 2 5 4 6 2 . 8 3 1
2 4 7 6 3 8 6
6 6 0 3 6 9 6
6 8 5 9 5 8 9 2 2

b) 9 2 5 4 3 6 . 1 8 3
7 4 0 3 4 8 8
2 7 7 6 3 0 8
1 6 9 3 5 4 7 8 8

2) Mit den nicht über 15 hinausliegenden Zahlen multipliziere man wie mit einstelligen.

z. B. 1 4 8 0 6 . 1 2
1 7 7 6 7 2

3) Die Multiplikation mit einer zwei- und dreizifferigen Zahl läßt sich unter Ersparung von Ziffern ausführen, wenn man eine solche Zahl in Faktoren zerlegen kann.

z. B. 3 2 5 4 5 9 . 72 (= 9 . 8)
. 9
2 9 2 9 1 3 1
. 8
2 3 4 3 3 0 4 8

4) Mit 10, 100, 1000 u. s. w. multipliziert man, indem man dem Multiplikanden ebenso viele Nullen anfügt, als deren Multiplikator enthält.

z. B. 1752 . 1000 = 1752000

5) Ist eine Multiplikation mit 25 oder 125 auszuführen, so wird man mit 100 oder mit 1000 multiplizieren und das Produkt durch 4 oder 8 dividieren, weil man den Multiplikator 4 mal oder 8 mal so groß genommen hat, als er ist, denn 25 ist der vierte Teil von Hundert, 125 der achte Teil von Tausend 2c. 2c.

z. B. 168 . 25 = 16800 : 4 = 4200
1296 . 125 = 1296000 : 8 = 162000.

6) Besteht der Multiplikator aus einer Zahl, welche den Zahlen 100, 1000, 10000 u. s. w. nahe liegt, so multipliziere man mit diesen Zahlen und subtrahiere das Produkt aus dem Multiplikanden und der fehlenden Zahl.

z. B. 854325 . 998 = 854325 . 1000 = 854325000
— 854325 . 2 = —1708650

852616350

7) Multiplikation mit 11

Man schreibe die Einer des Multiplikanden als Einer des Produkts an und addiere dann die Einer zu den Zehnern, die Zehner zu den Hundertern ꝛc. Schließlich schreibt man die letzte oder höchste Stelle wieder allein an, falls nicht noch 1 hinüber zu zählen ist.

z. B.
33 . 11 = 363
55 . 11 = 605
54236 . 11 = 596596
78956 . 11 = 868516.

Ein verkürzter Ausdruck der Multiplikation ist das **Potenzieren.**

Unter einer **Potenz** versteht man ein **Produkt aus lauter gleichen Faktoren.**

z. B. $5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$
$7^4 = 7 . 7 . 7 . 7 = 2401$

In der Potenz 7^4 (gesprochen 7 zur 4. Potenz oder 7 hoch [4]) heißt **7 die Grundzahl (Basis), 4 der Exponent.**

Die **Grundzahl oder Basis** ist jene Zahl, welche mit sich selbst multipliziert werden soll.

Der **Exponent** ist jene Zahl, welche angibt, wie oft die Grundzahl mit sich selbst multipliziert werden soll.

Anm. Basis und Exponent lassen sich nicht miteinander vertauschen.
$7^4 = 2401$
$4^7 = 16384$

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 6, 7 und 8.

IV. Division.

Dividieren oder teilen heißt, suchen, wievielmal eine gegebene Zahl in einer anderen enthalten ist oder wie oft eine Zahl von einer anderen hinweggenommen werden kann.

Die **Division** ist daher eigentlich eine **abgekürzte Subtraktion,** d. i. ein **wiederholtes Subtrahieren** mit **gleichen Subtrahenden.**

Die Zahl, welche dividiert oder geteilt werden soll, heißt **Dividend oder Teilungszahl**, die Zahl, mit welcher dividiert oder geteilt wird, heißt **Divisor oder Teiler** und endlich das Ergebnis oder Resultat der Division heißt **Quotient oder Teil. Dividend** und **Divisor** werden durch das **Divisionszeichen** („ : ") (gesprochen „dividiert durch") unter sich und durch das Gleichheitszeichen „ = " mit dem Quotienten verbunden.

z. B. 28 : 7 = 4, d. h. der 7 Teil von 28 = 4 oder 7 ist in 28 4 mal enthalten oder die Zahl 7 kann man 4 mal von der Zahl 28 wegnehmen oder subtrahieren.

z. B. 28 — 7 — 7 — 7 — 7 = 0.

Zwei Zahlen dividieren heißt auch, eine dritte neue Zahl suchen, welche mit der zweiten multipliziert die erste als Produkt gibt.

Dividend	**Divisor**	**Quotient**
28 :	4 =	7
formeller		**wirklicher**
	Quotient.	

Man dividiert die höchste Stelle des Dividenden durch den Divisor, multipliziert den erhaltenen Teilquotienten mit dem Divisor, subtrahiert das Produkt vom Dividenden und verfährt mit dem bleibenden Reste ebenso bis entweder die Division aufgeht oder ein Rest bleibt, der kleiner ist als der Divisor. Der **Quotient** ist also die **Summe** aus den **einzelnen Teilquotienten.**

```
42504804 : 1854 = 20000 + 2000 + 900 + 20 + 6
37080000                              = 22926
--------
 5424804
 3708000
--------
 1716804
 1668600
--------
   48204
   37080
--------
   11124
   11124
--------
     — —
```

Läßt man die Nullen weg, so braucht man blos vom Dividenden immer eine weitere Stelle herabzunehmen, während man im Quotienten jede folgende Ziffer um eine Stelle weiter nach rechts setzt. Auf diese Weise entspricht der Lokalwert der Ziffern des Quotienten dem der entsprechenden Ziffern des Dividenden.

```
Dividend  : Divisor = Quotient.
42504804  : 1854    = 22926
3708
----
 5424
 3708
 -----
 17168
 16686
 -----
   4820
   3708
   -----
   11124
   11124
   -----
   — —
```

Eine bedeutende Abkürzung gewährt das bereits früher angeführte Subtraktionsverfahren durch Ergänzung.

Man subtrahiert nämlich das Produkt aus dem Teilquotienten und dem Divisor, ohne dasselbe niederzuschreiben, wodurch man natürlich mit der Hälfte der sonst nötigen Ziffern ausreicht.

```
z. B.   42504804 : 1854 = 22926
         5424
         17168
           4820
           11124
           — —
```

Anm. Mündlich wird vorstehende Aufgabe auf folgende Weise gerechnet: 2 mal 4 ist 8 und (2) ist 10, bleibt 1; 2 mal 5 ist 10 und 1 ist 11 und (4) ist 15, bleibt 1; 2 mal 8 ist 16 und 1 ist 17 und 5 ist 22, bleibt 2; 2 mal 1 ist 2 und 2 ist 4 und (0) ist 4. Ganz auf dieselbe Weise verfährt man mit den weiteren Teilquotienten. Die mit ( ) bezeichneten Ziffern müssen als Rest angeschrieben werden, während das Übrige nur gesprochen wird.

Probe der Multiplikation und Division.

Die Probe der **Multiplikation** ist die **Division.**

Der hiefür geltende Lehrsatz lautet:

Produkt dividiert durch den Multiplikanden gibt den Multiplikator oder Produkt dividiert durch den Multiplikator gibt den Multiplikanden oder kurz Produkt dividiert durch den einen Faktor gibt den andern Faktor.

z. B. Multiplikand Multiplikator Produkt

$$120 \quad . \quad 30 = 3600$$

1) a) $$\frac{\text{Produkt}}{\text{Multiplikator}} = \text{Multiplikand}$$

$$\frac{3600}{30} = 120$$

b) $$\frac{\text{Produkt}}{\text{Multiplikand}} = \text{Multiplikator}$$

$$\frac{3600}{120} = 30$$

2) $$\frac{\text{Produkt}}{\text{den einen Faktor}} = \text{der andere Faktor}$$

Die Probe der Division ist die Multiplikation.

Die Regel lautet:

Divisor . Quotient = Dividend.

z. B. Dividend : Divisor = Quotient

$$28 : 4 = 7$$

Probe **Divisor . Quotient = Dividend**

$$4 \; . \; 7 = 28$$

Bleibt bei der Division ein Rest, so lautet die Regel:

Divisor . Quotient + Rest = Dividend.

Dividend : Divisor = Quotient

z. B. $51_3 : 12 = 4$

Probe. **Divisor . Quotient + Rest = Dividend**

$$12 \; . \; 4 + 3 = 51.$$

Eine Zahl wird durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividiert, indem man von der Zahl soviele Stellen abstreicht, als der Divisor Nullen hat. Die abgestrichenen Stellen des Dividenden bilden den Rest der Division.

Z. B.

	927 : 10	
Quotient	92	7 Rest
	9536 : 100	
Quotient	95	36 Rest
	1279458 : 1000	
Quotient	1279	458 Rest.

Durch 5 wird eine Zahl dividiert, indem man die Zahl mit 2 multipliziert und das Produkt durch 10 dividiert.

7395 : 5 = (7395 . 2) : 10 = 14790 : 10 = 1479.

Durch 25 wird eine Zahl dividiert, indem man die Zahl mit 4 multipliziert und das Produkt durch 100 dividiert.

9000 : 25 = (9000 . 4) : 100 = 36000 : 100 = 360.

Durch 125 wird eine Zahl dividiert, indem man die Zahl mit 8 multipliziert und das Produkt durch 1000 dividiert.

111000 : 125 = (111000 . 8) : 1000 = 888000 : 1000 = 888.

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 8, 9 und 10.

V. Zahlenausdrücke.

Unter einem Zahlenausdruck versteht man die Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen durch irgend welche Operationszeichen der verschiedenen Rechnungsarten.

Man unterscheidet **einfache** und **zusammengesetzte Zahlenausdrücke.**

Die **einfachen Zahlenausdrücke** sind:

1) **die Summe,** z. B. 5 + 9

2) **die Differenz,** z. B. 9 — 7

3) **das Produkt**, z. B. 7 · 4
4) **der Quotient**, z. B. 28 : 4.

Die **zusammengesetzten Zahlenausdrücke** bestehen aus einer Vereinigung von einfachen Zahlenausdrücken.

Man unterscheidet Zahlenausdrücke der **ersten Art**, der **zweiten Art** und endlich der **gemischten Art**.

a) Zahlenausdrücke der ersten Art.

Sind mehrere Zahlenausdrücke durch die Zeichen + und —, also durch Addition und Subtraktion mit einander verbunden, so heißt man einen solchen Zahlenausdruck ein **Aggregat (algebraische oder arithmetische Summe, Polynom)**.

Die einzelnen durch „plus" oder „minus" mit einander verbundenen Zahlen heißen **Glieder des Aggregates** und zwar die mit dem Vorzeichen + **positive** (additive) und die mit dem Vorzeichen — **negative** (subtraktive) Glieder des Aggregates.

Steht vor einem Gliede kein Zeichen, so ist dasselbe als positiv zu betrachten.

Die Reihenfolge der Glieder ist eine beliebige, nur ist zu bemerken, daß man die algebraische Summe wo möglich mit einem positiven Gliede beginnt.

Zahlenausdrücke innerhalb einer Klammer müssen zuerst berechnet werden.

$$17 - 9 + 5 + 8 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$8 + 5 + 8 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$13 + 8 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$21 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$19 - 6 + 11 - 7 =$$
$$13 + 11 - 7 =$$
$$24 - 7 =$$
$$17$$

Den Wert eines Aggregates findet man auch, wenn man von der Summe der positiven Glieder die Summe der negativen Glieder subtrahiert.

$$17 - 9 + 5 + 8 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$(17 + 5 + 8 + 11) - (9 + 2 + 6 + 7)$$
$$41 - 24 = 17.$$

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 10 und 11.

b) Zahlenausdrücke der zweiten Art.

Sind die Glieder eines Zahlenausdruckes durch Multiplikation und Division verbunden, so nennt man diese Verbindung einen **Zahlenausdruck der zweiten Art.**

Ein solcher aus **Faktoren** und **Divisoren** bestehender Ausdruck heißt **algebraisches Produkt oder Serie.**

Die Reihenfolge, nach welcher multipliziert und dividiert wird, ist für die Berechnung eines algebraischen Produktes oder einer Serie ganz gleichgiltig.

z. B.

$$6 \,.\, 16 : 12 \,.\, 14 : 4 =$$
$$96 : 12 \,.\, 14 : 4 =$$
$$8 \,.\, 14 : 4 =$$
$$112 : 4 =$$
$$28$$

Den Wert eines algebraischen Produktes oder einer Serie findet man auch, wenn man das Produkt aller Faktoren durch das Produkt aller Divisoren dividiert.

z. B.

$$6 \,.\, 16 : 12 \,.\, 14 : 4 =$$
$$(6 \,.\, 16 \,.\, 14) : (12 \,.\, 4) =$$
$$1344 : 48 = 28$$

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 11.

c) Zahlenausdrücke der gemischten Art.

Wenn in einem Zahlenausdrucke alle vier Rechnungsarten (Species) enthalten sind, so nennt man eine solche Verbindung einen **Zahlenausdruck der gemischten Art.** Bei einem solchen Zahlenausdruck ist die Reihenfolge der Operationen nicht gleichgiltig. Hier gilt die Regel, daß immer die Operationen der zweiten Art, also Multiplikation und Division, den Vorrang vor den Operationen der ersten Art, also der Addition und Subtraktion haben. Soll aber doch eine Operation der ersten Art den Vorrang haben, so muß dies durch eine Klammer angezeigt werden. z. B.

a) $35 - 7 \,.\, 9 + 242 : 22 + 7 \,.\, 3 =$
$35 - 63 + 11 + 21 =$
$67 - 63 = \mathbf{4}$

b) $16 \,.\, (7 + 21 : 7) : 8 + 10 =$
$16 \,.\, (7 + 3) : 8 + 10 =$
$16 \,.\, 10 : 8 + 10 =$
$20 + 10 = \mathbf{30}$

c) $(17 + 24 : 8) : [7 - (11 + 31) : (14 - 12) + 3 \,.\, (19 - 39 : 3)] + 5 =$
$(17 + 3) : [7 - 42 : 2 + 3 \,.\, (19 - 13)] + 5 =$
$20 : [7 - 21 + 3 \,.\, 6] + 5 =$
$20 : [7 - 21 + 18] + 5 =$
$20 : 4 + 5 =$
$5 + 5 = \mathbf{10}$

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 12 und 13.

3. Die vier Spezies mit benannten ganzen Zahlen.

Um benannte Zahlen vergleichen und verbinden zu können, muß man das Maß kennen, von dem ihre Benennung abgeleitet ist. Dieses Maß bezieht sich

1) **auf die bloße Anzahl der Dinge** (Stückmaß), z. B. Stück (Eier), Dutzend (Bleistifte), Ballen (Papier) u. s. w.;
2) **auf die räumliche Ausdehnung** und zwar
   a) auf die **Länge** (Längenmaß), Meter, Meilen ꝛc.;
   b) auf die **Fläche** (Flächenmaß), z. B. Quadratmeter, Ar, Hektar ꝛc.;
   c) auf den **körperlichen Inhalt** (Körpermaß), z. B. Kubikmeter, Ster, Liter ꝛc.;
3) **auf das Gewicht**, z. B. Zentner, Kilogramm, Pfund ꝛc.;
4) **auf den Preis** (Wertmaß), z. B. Mark, Francs;
5) **auf die Zeit**, z. B. Jahr, Monat, Tag, Stunde, Minuten, Sekunden;
6) **auf den Winkel** (Winkelmaß), z. B. Grad, Minuten, Sekunden.

Zusammengehörige höhere und niedere Mehreinheiten werden gleichartig, z. B. 1 ℳ 27 ₰, nicht zusammengehörige, z. B. 4 ℳ und 7 Liter ungleichartige genannt.

Statt der benannten Zahl 150 Pfennige könnte man auch sagen 100 Pfennige und 50 Pfennige, oder, da 100 Pfennige soviel wie 1 Mark sind, auch 1 Mark 50 Pfennige. Hieraus folgt, daß 150 Pfennige = 1 Mk. 50 Pf. Deshalb unterscheidet man **einfach benannte Zahlen,** wenn eine Zahl nur durch eine Benennung dargestellt ist, dagegen **mehrfach benannte Zahlen,** wenn zum Ausdrucke einer Zahl mehrere Benennungen verwendet sind.

Das Verwandeln von Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niederer Ordnung sowie umgekehrt das Verwandeln von Einheiten niederer Ordnung in Einheiten höherer Ordnung heißt reduzieren.

Um eine Reduktion vornehmen zu können, ist es notwendig, daß man die Zahl kennt, welche angibt, wie viele Einheiten einer niedern Ordnung auf die Einheit der nächst höheren Ordnung gehen. Diese Zahl wird **Reduktionszahl** genannt. So ist z. B. für die Einheiten Mark und Pfennige die Reduktionszahl 100, für Jahr und Monate 12, für Tag und Stunde 24 u. s. w.

Reduktionszahlen.

a) Einteilung der Maße, Gewichte und Münzen.

1. Stückmaße.

1 Groß = 12 Dutzend.
1 Dutzend = 12 Stück.
1 Schock = 4 Mandel = 60 Stück.
1 Mandel = 15 Stück.
1 Viertel (Eier, Äpfel u. s. w.) = 25 Stück.

Altes Papiermaß.

1 Ballen = 10 Ries
1 Ries = 20 Buch
1 Buch = 24 Bogen geleimt (Schreibpapier).
1 Buch = 25 Bogen ungeleimt (Druckpapier).

Bll. = Ballen; Rs. = Ries; Bch. = Buch; Bg. = Bogen; Grss. = Groß; Mdl. = Mandel; Dtz. = Dutzend.

2. Längen-, Flächen- und Körpermaße.

In ganz Deutschland, in Frankreich, Italien, Belgien, Holland, in der Schweiz, in Griechenland, in Spanien und nunmehr auch in Österreich gilt das **metrische Maß- und Gewichtssystem.**

Die wesentlichen Vorzüge dieses auf ein Naturmaß (Meridianmessung) begründeten Systems liegen vor allem in der gemeinsamen Einheit für alle Maße und der allen gemeinsamen dekadischen Teilung ihrer Einheiten, dann der daraus folgenden Übereinstimmung der Längen-, Flächen- und Körpermaße, sowie in dem unmittelbaren Zusammenhange zwischen dem Raum-, Hohlmaß und Gewicht.

Die Benennung der Einheiten verschiedener Ordnung geschieht durch Vorsilben, indem den Einheiten niedrigerer Ordnung die aus dem Lateinischen abgeleiteten Wörter deci (decem 10), centi (centum 100), milli (mille 1000), den Einheiten höherer Ordnung aber die aus dem Griechischen abgeleiteten Wörter Deka (10fach), Hekto (100fach), Kilo (1000fach), Myria (10000fach), vorgesetzt werden.

Abgekürzte Bezeichnung der metrischen Maße.

a) Längenmaß	b) Flächenmaß
Kilometer = km	Quadratkilometer = qkm
Meter = m	Hektar = ha
Decimeter = dm	Ar = a
Centimeter = cm	Quadratmeter = qm
Millimeter = mm	Quadratdecimeter = qdm
	Quadratcentimeter = qcm
	Quadratmillimeter = qmm

c) Körper- und Hohlmaße.

Kubikmeter = cbm
Kubikdecimeter = cdm
Kubikcentimeter = ccm
Kubikmillimeter = cmm
Hektoliter = hl
Liter = l

Anm. Den Buchstaben werden Schließpunkte nicht beigefügt.

a) Längenmaße.

Ueber die Längenmaße setzt die Maß- und Gewichtsordnung (Art. 3) folgendes fest:

Die Einheit der Längenmaße bildet das oder der Meter oder der Stab, d. i. der vierzig millionste Teil des Erdmeridians oder der zehn millionste Teil des durch die Sternwarte von Paris gehenden Erdmeridians.

1 km = 1000 m

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm

1 dm = 10 cm = 100 mm

1 cm = 10 mm

10 m = 1 Dekameter (Dm) oder eine Kette

100 m = 1 Hektometer (hm)

1000 m = 1 Kilometer (km)

10000 m = 1 Myriameter (Mm)

Als Entfernungsmaß dient die Meile von 7500 Metern (Art. 4). Das Kilometer dient als Wegmaß und werden demnach gemessen: Bahnstrecken, Chausseen, Flüsse ꝛc. Das Meter wird beim Verkauf von Schnittwaren besonders gebraucht. Bauhandwerker, Feldmesser (Geometer) und Forstbeamte gebrauchen längere Maße (Meßkette).

Anm. Zur Eichung werden Maßstäbe von folgenden Längen zugelassen: 20 Meter, 10, 5, 2, 1 Meter, $^5/_{10}$ Meter oder 5 Decimeter oder 50 Centimeter, $^2/_{10}$ Meter oder 2 Decimeter oder 20 Centimeter, $^1/_{10}$ Meter oder 1 Decimeter oder 10 Centimeter.

„Eichen" heißt Maßen und Gewichten die gesetzmäßige Größe und Schwere geben, dem Nr. oder Muttermaß gleich machen und das durch den Eichstempel zu bescheinigen. Zu diesem Zwecke gibt es Eichungsbehörden (Verifikatoren).

b) Flächenmaß.

Artikel 3 der Maß- und Gewichtsordnung setzt über dieselben folgendes fest.

Die Einheit der Flächenmaße bildet das qm, ein Quadratmeter, dessen Seite 1 m lang ist.

1 qm = 100 qdm

1 qdm = 100 qcm

1 qcm = 100 qmm

Als Einheit des neuen Feldmaßes wird in Bayern das ha angenommen, die Unterabteilungen des ha werden durch a und qm bezeichnet. Für die Landesmessung dient das qkm.

1 qkm = 100 ha = 10000 a = 1000000 qm
1 ha = 100 a = 10000 qm
1 a = 100 qm

Das neue Feldmaß wird verwendet beim Ausmessen von Feld- und Waldflächen. Um den Flächeninhalt von Ländern und Provinzen anzugeben, bedient man sich, wie bereits oben bemerkt, des Quadratkilometers und der Quadratmeile.

Die Quadratmeile umfaßt 7500 . 7500 = 56250000 qm = 5625 ha.

c) Körper- und Hohlmaße.

Die Einheit des Körpermaßes bildet das cbm oder Ster, ein Würfel, dessen Seite 1 m lang ist. Die Einheit des Hohlmaßes ist der tausendste Teil des cbm und heißt l. Ein cbm als Hohlmaß heißt ein Ster.

a) Körpermaß.

1 cbm = 1000 cdm
1 cdm = 1000 ccm
1 ccm = 1000 cmm

b) Hohlmaß.

1 hl = 100 l.

Anm. 1. 1 l = dem Inhalte eines cdm.
10 hl oder 1000 l = dem Inhalte eines cbm.

Anm. 2. 50 Liter bilden einen Scheffel. Im bürgerlichen Leben gebraucht man: Hektoliter, Scheffel, Liter, halbe Liter, Viertelsliter ꝛc. um Flüssigkeiten, Kartoffeln, Früchte, Sämereien ꝛc. zu messen. Die Hohlmaße heißen öfters auch Füllmaße.

Anm. 3. Um den kubischen Inhalt eines Zimmers, der Erdmassen, Baumstämme ꝛc. anzugeben, rechnet man nach cbm.

Anm. 4. Bei Gefäßen, z. B. Fässern, Balkons ꝛc. nach hl und l; bei ganz kleinen Körpern, z. B. die Teile einer Maschine, nach ccm.

3. Gewichte.

Abgekürzte Bezeichnung der Gewichte:
Tonne = t
Kilogramm = kg

Gramm = g
Milligramm — mg
Zentner = Ztr.
Pfund = ℔

Die Einheit des Gewichtes bildet das kg = 2 ℔, das Gewicht eines l (chemisch reinen) Wassers bei + 4° Celsius.

1 kg = 1000 g
1 kg = 2 ℔
50 kg = 100 ℔ = 1 Ztr.
1000 kg = 2000 ℔ = 20 Ztr. = 1 t.

Anm. 1. 1 ℔ = ½ kg = 50 Dg oder Neulot = 500 g.

Anm. 2. Durch die Einschiebung von ℔ und Ztr wird das rein metrische System zwar unterbrochen, aber es leidet die dekadische Einteilung dadurch nicht, weil 2 und 5 Faktoren von 10 sind.

1 g = 10 dg
1 dg = 10 cg
1 cg = 10 mg

Die Unterabteilungen von g finden Verwendung in der Apotheke, sowie als Gold-, Silber-, Juwelen- und Perlengewichte.

Zusammenhang zwischen Körper-, Hohlmaß und Gewicht.

1 ccm	Wasser (bei + 4° C.)	= 1 Milliliter	u. wiegt	1	g
1 cdm	„ „	= 1 l	„ „	1	kg
1 cbm	„ „	= 10 hl	„ „	1	t

4. Das Zeitmaß.

Die Zeit, welche die Erde braucht, um sich einmal um ihre Achse zu drehen, heißt ein Tag, gerechnet von einer Mitternacht zur andern. Die Zeit, welche die Erde braucht, um sich einmal um die Sonne zu bewegen, heißt Jahr.

Das bürgerliche Jahr hat 365 Tage, in einem Schaltjahre 366 Tage.

Das Jahr wird außerdem noch in 2 Semester oder 4 Quartale geteilt.

10 Jahre nennt man ein Decennium.
100 Jahre nennt man ein Säculum oder Jahrhundert.
1000 Jahre heißen ein Jahrtausend.

Im Geschäftsverkehr wird das Jahr durchschnittlich zu 360 Tagen, der Monat zu 30 Tagen gerechnet.

Eine Woche hat 7 Tage, aber nur 6 Arbeitstage. Der Arbeitstag wird zu 12 Stunden gerechnet.

Das astronomische Jahr hat 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Sekunden.

1 Tag = 24 Stunden
1 Stunde = 60 Minuten
1 Minute = 60 Sekunden.

Das Schaltjahr hat 366 Tage. Um zu bestimmen, ob das Jahr ein Schaltjahr zu 366 Tagen ist, dividiert man die Jahreszahl durch 4; bleibt kein Rest, so ist das Jahr ein Schaltjahr. Ausgenommen sind die Jahre, welche durch 100, nicht aber durch 400 teilbar sind; in letzterem Falle, sowie wenn ein Rest bleibt, ist das Jahr ein gemeines Jahr.

Das Jahr wird in 12 Monate (52 Wochen) eingeteilt, welche aber an Dauer verschieden sind.

Es hat der

Januar	der 1. Monat	31	Tage	Juni	der 6. Monat	30	Tage
Februar	„ 2. „			Juli	„ 7. „	31	„
	Gemeinjahr	28	„	August	„ 8. „	31	„
	Schaltjahr	29	„	September	„ 9. „	30	„
März	„ 3. Monat	31	„	Oktober	„ 10. „	31	„
April	„ 4. „	30	„	November	„ 11. „	30	„
Mai	„ 5. „	31	„	Dezember	„ 12 „	31	„

Um die Namen der Monate, welche 30 Tage haben, zu behalten, merkt man: Ap — Jun — Se — Nov d. h. April, Juni, September, November, die übrigen Monate haben 31, der Februar 28 oder 29 Tage.

Anm. Der Ausgangspunkt bei Zeitbestimmungen ist verschieden. So zählen z. B. die christlichen Völker von der Geburt Christi an, die Muhamedaner von der Flucht Muhameds von Mekka nach Medina, die Juden von Erschaffung der Welt an 2c.

Abkürzungen für die Zeitmaße:

a. J. = anno, Jahr; Mt. = Monat; Tg. oder d (dies) = Tag; Std. oder h (hora) = Stunde; Wch. = Wochen; Min. (′) = Minuten; Sek. (″) = Sekunden.

5. Bogen- und Winkelmaß.

Den Umfang eines Kreises*) teilt man in 360 Grade (360°).

1° = 60 Minuten (Bogenminuten).

1 Minute = 60 Sekunden (Bogensekunden).

Der rechte Winkel (Quadrant) hat 360 : 4 = 90°.

Abkürzungen für Bogen- und Winkelmaße:

° = Grad; ' = Minute; " = Sekunde.

6. Wertmaß (Geld).

a) Neue deutsche Reichsmünze.

Durch Reichsgesetz vom 4. Dezember 1871 wurde die Einführung der Gold- statt der Silberwährung bestimmt.

Die Münzeinheit der deutschen Reichswährung ist die Mark (ℳ), welche in 100 Pfennige (₰) eingeteilt wird.

Goldmünzen:

Das Zwanzigmarkstück (Doppelkrone),
" Zehnmarkstück (Krone),
" Fünfmarkstück (halbe Krone).

Silbermünzen:

Das Fünfmarkstück,
" Dreimarkstück (Thaler)**)
" Zweimarkstück,
" Einmarkstück,
" Fünfzigpfennigstück,
" Zwanzigpfennigstück.

Nickelmünzen:

Das Zwanzigpfennigstück,
" Zehnpfennigstück,
" Fünfpfennigstück.

Kupfermünzen:

Das Zweipfennigstück,
" Das Einpfennigstück.

Münzstätten Deutschlands, deren Namen auf den einzelnen Münzen durch die eingeklammerten Buchstaben angegeben sind:

Berlin (A), Hannover (B), Frankfurt a M. (C), München (D),

*) Die Definition des Kreises bleibt dem Unterrichte vorbehalten.

**) Dieses Geldstück wird nicht mehr geprägt.

Dresden (E), Stuttgart (F), Karlsruhe (G), Darmstadt (H), und Hamburg (J).

Außer den aus Gold, Silber, Nickel und Kupfer geprägten Münzen ist auch Papiergeld im Umlauf. (Das Nähere siehe im Kapitel Staatspapiere ꝛc.)

Anm. Während die deutschen Reichsmünzen dem Kurse nicht unterworfen sind, sind die ausländischen Goldmünzen dem Kurse unterworfen, d. h. steigen oder fallen in ihrem Werte.

b) Ausländische Münzen.

1) die österreichische Währung (ö. W.) 1 fl. = 100 Neukreuzer (2 ℳ);
2) die französische Währung 1 Franc = 100 Centimes (80 ₰);
in der Schweiz ist 1 Franc = 100 Rappen (80 ₰);
3) die italienische Währung 1 Lira = 100 Centesimi (80 ₰);
4) die englische Währung 1 Pfund Sterling (Livre Sterl., Sovereign) = 20 ℳ 43 ₰ circa, 1 Pfund Sterling = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Pences;
5) die russische Währung 1 Silberrubel = 100 Kopeken (3 ℳ 20 ₰ circa);
6) die amerikanische Währung 1 Dollar = 100 Cent (4 ℳ 25 ₰ circa).

Abkürzungen für Münzen.

ℳ = Mark, ₰ = Pfennig, fl. = Gulden (florin); nkr. = Neukreuzer. fr. = Franc (Plural: frs. = Francs); c. = Centime (Plural: cs. = Centimes).

£ = Lira (Plural: Lire); c. = Centesimo (Plural: cs. = Centesimi.

£ = Livre (Pfund) Sterling oder Sovereign; sh. = Schilling engl.; d. = Pence (Plural: Pences).

S = Silberrubel; Kop. = Kopeken.

$ = Dollar (Plural: Dollars);

c. = Cent (Plural: cs. = Cents).

Abkürzungen für Geschäftsgebräuche.

a. c. = anni currentis, laufenden Jahres,
av. = avance, Gewinn,
Btto, Ntto, Ta = Brutto, Netto, Tara,
ca. = cirka, ungefähr,
dc. = decimal (Abstufung nach je 10),
do. = ditto, desgleichen,
p. a. = pro anno, für das Jahr,
k. S. = kurze Sicht,
p. c., $\frac{0}{0}$ = Procent, für 100,
p. m., $\frac{0}{00}$ = Promille, für 1000,
pr. M. = per Monat, für den Monat,
ulto. = ultimo, am letzten Tage.

Anm. Das Gewicht der Ware samt der Verpackung (emballage) nennt man das Bruttogewicht der Ware (kaufm. kurzweg Brutto). Das Gewicht der Ware ohne Verpackung wird Nettogewicht genannt (kaufm. kurzweg Netto). Endlich das Gewicht der Verpackung (emballage) heißt Tara.

a) Resolvieren.

1) Beispiel. ? Pfennig sind 5 Mark 16 Pfennig?
$5 \times 100 + 16 = 516$ Pfennig.

2) Beispiel. Wie viel g geben 1 t 10 Ztr. 25 kg 1 ℔ und 250 g?

1 t = 1 . 20 Ztr.
20 Ztr.
+ 10 Ztr.
30 Ztr. = 30 . 50 kg
1500 kg
+ 25 kg
1525 kg = 1525 . 2 ℔
3050 ℔
+ 1 ℔
3051 ℔ = 3051 . 500 g
1525500 g
+ 250 g
1525750 g

1 t 10 Ztr. 25 kg. 1 ℔ 250 g = 1525750 g.

3. Beispiel. Wie viele Sekunden geben 7 Tage 7 Stunden 10 Minuten und 5 Sekunden?

7 d 7 h 10′ 5″

7 d = 7 . 24 h
168 h
+ 7 h
175 h = 175 . 60′
10500′
+ 10′
10510′ = 10510 . 60″
630600″
+ 5″
630605″

7 d 7 h 10′ 5″ = 630605″

oder

[((7 . 24 + 7) . 60 + 10) . 60 + 5] = ″

[(175 . 60 + 10) . 60 + 5] = ″

[10510 . 60 + 5] = 630605″ geben 7 d 7 h 10′ 5″.

Resolvieren heißt Einheiten der höheren Sorte in Einheiten der niederen Sorte verwandeln (auflösen), z. B. Mark in Pfennig. Dies geschieht durch die Multiplikation der höheren Sorte mit der sogenannten Reduktionszahl.

Unter Reduktionszahl (Verwandlungszahl) versteht man jene Zahl, welche angibt, wie viel Einheiten einer niederen Ordnung eine Einheit einer höheren Ordnung ausmachen.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 13 und 14.

b) Reduzieren.

1) 8315 Pf. ? Mark
= 8315 : 100 = 83 Mark 15 Pf.

2) 3114 Sekunden ? Stunden rc.
311 (4 Sek. : 6 (0 = 51 Minuten 54 Sek. Rest
= 51 Minuten 54 Sekunden.

3) 7239 Centimes ? Francs
7239 : 100 = 72 Francs 39 Centimes.

4) Wie viele ha, a und qm geben 735947 qm?
735947 qm = 735947 qm : 100 = 7359 a
Rest 47 qm
7359 a = 7359 a : 100 = 73 ha
(Rest 59 a)
735947 qm = 73 ha 59 a 47 qm oder
ha | a |
73 | 59 | 47 qm = 73 ha 59 a 47 qm.

5) Wie viele Tonnen, kg und g geben 756325027 g?
t | kg |
756 | 325 | 027 g = 756 t 325 kg 27 g.

6) Wie viele Tage sind 630605''?
630605'' = 630605'' : 60 = 10510'
Rest 5''
10510' = 10510 : 60 = 175 h
Rest 10'
175 h = 175 h : 24 = 7 d
Rest 7 h
630605'' geben 7 d 7 h 10' 5''

Reduzieren heißt, **Einheiten der niederen Ordnung** in **Einheiten der höheren Ordnung umwandeln (zurückführen)** z. B. Pfennig in Mark.

Das Reduzieren geschieht durch die **Division der niederen Sorte** durch die Reduktionszahl.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 14, 15 und 16.

Vermischte Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 17 und 18.

c) Die vier Grundrechnungsarten mit benannten Zahlen.

I. Addition.

Beispiele.

1) Bei einem Hausbau betrugen die Auslagen für Maurerarbeit 5876 ℳ 93 ₰, für Zimmermannsarbeit 998 ℳ 72 ₰, für Tüncherarbeit 796 ℳ 85 ₰, für Schreinerarbeit 1015 ℳ 44 ₰, für Schlosserarbeit 1506 ℳ 13 ₰, für Glaserarbeit 688 ℳ, für Dachdeckerarbeit 967 ℳ 95 ₰, für Spänglerarbeit 98 ℳ 17 ₰, für Tapeziererarbeit 317 ℳ, für anderweitige Ausgaben wurden noch 780 ℳ 75 ₰ bezahlt. Wie hoch kam der ganze Hausbau?

Anm. Hat man 7 ℳ 50 ₰ zu schreiben, so schreibt man 7,50 ℳ

5876 ℳ 93 ₰	oder	5876,93 ℳ
998 ℳ 72 ₰	„	998,72 ℳ
796 ℳ 85 ₰	„	796,85 ℳ
1015 ℳ 44 ₰	„	1015,44 ℳ
1506 ℳ 13 ₰	„	1506,13 ℳ
688 ℳ — ₰	„	688,— ℳ
967 ℳ 95 ₰	„	967,95 ℳ
98 ℳ 17 ₰	„	98,17 ℳ
317 ℳ — ₰	„	317,— ℳ
780 ℳ 75 ₰	„	780,75 ℳ
13045 ℳ 94 ₰	„	13045,94 ℳ

kostet der ganze Hausbau.

2) Eine Ware wiegt Netto 20 kg 770 g, die Tara beträgt 2 kg 530 g; wie groß ist das Bruttogewicht der Ware?

20 kg 770 g = Nettogewicht
\+ 2 kg 530 g = Tara

23 kg 300 g beträgt das Bruttogewicht der Ware.

3) Welches war der Einkaufspreis einer Ware, welche jemand in London mit einem Verlust von 15 £ 3 sh 8 d für 74 £ 16 sh 4 d verkaufte?

74 £ 16 sh 4 d Verkaufspreis
17 £ 3 sh 8 d Verlust

90 £ — sh — d betrug der Einkaufspreis der Ware.

Aus vorstehenden Beispielen folgt:

Addiert können nur gleichnamige Zahlen werden; die Summe ist dann von derselben Art.

z. B. 23 ℳ + 17 ℳ = 40 ℳ

Wenn mehrfach benannte Zahlen zu addieren sind, schreibt man die gleichnamigen Einheiten genau untereinander, beginnt die Addition bei der niedrigsten Einheit, welche man gleich zu höheren Einheiten reduziert.

Anm. Sind viele Summanden oder Posten, wie z. B. in einer großen Rechnung im Haushaltungsbuche zu addieren, so teile man sie im mehrere Aufgaben, suche dann die Teil= oder Partial=Summen und vereinige diese durch eine Zusammenstellung zuletzt in die Gesamt= oder Total=Summe.

Sind die Posten fortlaufend und stehen sie auf mehreren Seiten, wie z. B. in einem Kontobuch oder in einem Kassabuch, so addiere man die verschiedenen Seiten und mache am Schlusse eine Zusammenstellung der einzelnen Seitenbeträge (Latus), welche addiert dann die Haupt=, Gesamt= oder Totalsumme geben.

Noch einfacher ist es, wenn man sofort jeden einzelnen Seitenbetrag (Latus) unter dem Namen Übertrag (Transport) jedesmal zu oberst auf die nächstfolgende Seite schreibt und als Posten mitzählt. Dadurch enthebt man sich der Mühe einer Schlußzusammenstellung.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 18—25 incl.

II. Subtraktion.

Beispiele.

1) Eine Ware kostet im Einkauf 317 ℳ 48 ₰, im Verkauf 328 ℳ 5 ₰; wie groß ist der Gewinn?

		100		
328 ℳ		5 ₰	=	Verkaufspreis.
317 ℳ		48 ₰	=	Einkaufspreis.
10 ℳ		57 ₰		werden an der Ware gewonnen.

2) Ein Kaufmann besitzt 38 Ztr 16 ℔ 125 g Zucker. Er verkauft davon 13 Ztr 43 ℔ 375 g. Wie viel Zucker bleibt ihm noch übrig.

	115	625	
38 Ztr	16 ℔	125 g	
13 Ztr	43 ℔	375 g	
24 Ztr	72 ℔	250 g	bleiben ihm noch übrig.

3) Von zwei Landgütern besteht das eine aus 35 ha 10 a 5 qm, das andere aus 29 ha 4 a 83 qm. Um wie viel ist das erstere größer als das letztere?

35 ha 10 a [105] 5 qm	oder	351005 qm	
29 ha 4 a 83 qm	oder	290483 qm	
6 ha 5 a 22 qm		60522 qm	
Das erste ist größer um		60522 qm = 605 a 22 qm	
6 ha 5 a 22 qm		= 6 ha 5 a 22 qm.	

4) Die Aktiva eines Bierbrauers betragen 275682 ℳ 45 ₰, die Passiva 96997 ℳ 87 ₰. Wie groß ist das Netto oder reine Vermögen des Mannes?

275682 ℳ	45 ₰	Aktiva
96997 „	87 „	Passiva
178684 ℳ	58 ₰	Netto oder reines Vermögen.

Aus vorstehenden Beispielen folgt:

Subtrahiert können nur gleichnamig benannte Zahlen werden. Die Differenz ist dann von derselben Art.

1) Anm. Der Geschäftsmann berechnet aus der Differenz oder dem Unterschied des Einkaufes und Verkaufes einer Ware seinen Gewinn oder Verlust. Uebersteigt der Verkaufspreis den Einkaufspreis, so gewinnt er, während er verliert, wenn er die Ware billiger verkaufen muß, als sie ihm im Einkauf zu stehen kam, d. h. wenn der Einkaufspreis den Verkaufspreis übersteigt.

2) Anm. Unter dem **Aktivvermögen** eines Geschäftsmannes, auch Aktiva genannt, versteht man alles das, was derselbe besitzt:

1) An barem Gelde;
2) an Immobilien (unbeweglichem Besitz) oder liegenden Gründen; z. B. Häusern, Gärten, Feldern, Wiesen &c.;
3) an Mobilien (beweglichem Besitz), d. i. an Möbeln, Betten, Kleidungsstücken, Schmucksachen &c.:
4) an Rohstoffen, Fabrikaten;
5) an Wechseln oder Staatspapieren;
6) an Forderungen (ausstehenden Geschäftsbeträgen &c.).

Unter **Passivvermögen,** auch Passiva genannt, versteht man alles das, was der Geschäftsmann anderen schuldet, z. B. Hypothekenschulden, welche auf seinem Immobilienbesitz lasten, oder Kurrentschulden (Geschäftsschulden).

Stellt man nun sämtliche Aktiva und Passiva zusammen, so ergibt der Überschuß der ersteren über die letzteren das **Nettovermögen** oder den Vermögensstand des Geschäftsmannes. Uebersteigen die Passiva die Activa, so besitzt der Geschäftsmann kein Vermögen und arbeitet mit einem Deficit, d. h. das Geschäft rentiert sich nicht.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 26 bis 29 incl.

III. Addition und Subtraktion.

Zeitrechnung.

Obschon die Zeitrechnung entweder als Addition oder Subtraktion mehrfach benannter Zahlen auftritt, so dürfte es doch nicht unzweckmäßig erscheinen, solche Aufgaben, in welchen es sich um die Bestimmung eines Zeitpunktes oder eines Zeitraumes (Zeitdauer) handelt, gesondert zu behandeln. Durch die Zeitberechnung kann ermittelt werden:

1) Der Anfang einer Begebenheit,
2) die Dauer einer Begebenheit,
3) das Ende einer Begebenheit.

Hieraus folgt, daß bei jeder Begebenheit dreierlei in Betracht kommt, nämlich 1. der Anfang, 2. die Dauer und 3. das Ende derselben. Sind zwei dieser Bestimmungen bekannt, so läßt sich aus ihnen durch Addition oder Subtraktion die dritte ermitteln.

Bei dergleichen Berechnungen ist jedoch folgendes ganz besonders zu beachten:

1) Wir zählen unsere Jahre von Christi Geburt an. Solange man das Jahr 1 schrieb, war noch kein ganzes Jahr verflossen, sondern erst als die Jahreszahl 2 nach Christi Geburt geschrieben wurde. Das Jahr, welches durch die Jahreszahl bezeichnet wird, ist daher noch nicht ganz verlaufen. Als wir z. B. anfingen 1894 zu schreiben, so waren erst 1893 Jahre nach Chr. Geburt verflossen.

2) Ebenso ist es mit den Monaten und Tagen. Der 7. März ist zwar der 7. Tag im 3. Monat; aber am 7. März ist weder der 3. Monat, noch der 7. Tag vollständig verflossen; es können daher nur 2 Monate und 6 ganz verflossene Tage in Anrechnung gebracht werden.

3) Der Tag hat 24 Stunden. Diese Stunden werden von nachts 12 Uhr bis wieder nachts 12 Uhr berechnet. Nun zählen wir freilich nach Einrichtung unserer Uhren die Stunden nur bis 12 und fangen dann wieder von 1 an; dies ist aber beim Rechnen anders. Morgens 1 Uhr ist die 1., mittags 12 Uhr die 12. Stunde, nachmittags 1 Uhr aber die 13., nachts 11 Uhr die 23. Stunde, weil 12 und 11 Stunden des Tages verflossen sind und 12 und

11 = 23 ist. Sonach wären z. B. am 7. März 1894 abends 5 Uhr verflossen: 1893 Jahre 2 Monate 6 Tage und 17 Stunden.

4) Die Zeit oder der Tag, an welchem etwas geschieht oder geschehen ist, nennt man die laufende Zeit oder das Datum, während die Jahre, Tage, Stunden und Minuten, welche von Christi Geburt an bis zu dem Zeitpunkt, welchen das Datum bezeichnet, verflossen sind, die verflossene Zeit bilden.

1. Der Anfang eines Zeitraumes ist gesucht.

Beispiel. Welches Datum schrieb man 90 Jahre 4 Monate 26 Tage vor dem 19. August 1894?

Auflösung. **Den Anfang der Zeit findet man, wenn man die Zeitdauer vom Ende derselben abzieht.**

Den 19. August 1894 war verflossen:

Ende:	1893	Jahre	7	Monate	18 (31)	Tage
Zeitdauer:	90	„	4	„	26	„
Anfang:	1803	„	2	„	23	„

90 Jahre 4 Monate 26 Tage früher als am 19. August 1894 waren wirklich 1803 Jahre 2 Monate und 23 Tage verflossen und man schrieb also damals den 24. März 1804.

2. Die Dauer eines Zeitraumes ist gesucht.

Beispiel. Wie viele Jahre, Monate, Tage, Stunden und Minuten sind verflossen vom 24. März 1764 abends $\frac{3}{4}$ auf 9 Uhr bis den 19. August 1864 mittags $\frac{1}{4}$ auf 1 Uhr?

Auflösung. **Die Zeitdauer findet man, wenn man den Anfang von dem Ende abzieht.** Das Ende der Aufgabe ist der 19. August 1864 mittags $\frac{1}{4}$ auf 1 Uhr und der Anfang ist der 24. März 1764 abends $\frac{3}{4}$ auf 9 Uhr. Damals waren verflossen:

Ende:	1863	Jhr.	7	Mon.	18 (31)	Tg.	12 (24)	Std.	15 (60)	Min.
Anfang:	1763	„	2	„	23	„	20	„	45	„
Zeitdauer:	100	„	4	„	25	„	15	„	30	„

Vom 24. März 1764 abends $\frac{3}{4}$ auf 9 Uhr bis den 19. August 1864 mittags $\frac{1}{4}$ auf 1 Uhr sind demnach 100 Jahre 4 Monate 25 Tage 15 Stunden und 30 Minuten verflossen.

3. Das Ende eines Zeitraumes ist gesucht.

Beispiel. Welches Datum schrieb man 90 Jahre 4 Monate 26 Tage später, als man den 24. März 1784 schrieb?

Auflösung. **Das Ende der Zeit findet man, wenn man zum Anfange der Zeit die Zeitdauer addiert.**

Am 24. März 1784 waren verflossen:

Anfang	1783 Jahre	2 Monate	23 Tage
Zeitdauer	90 "	4 "	26 "
			49 : 31
	1873 Jahre	7 Monate	18 Tage

90 Jahre 4 Monate und 26 Tage später als am 24. März 1784 waren demnach 1873 Jahre 7 Monate und 18 Tage verflossen und man schrieb sonach den 19. August 1874.

Den Wochentag des 1. Juni für irgend ein Jahr unseres Jahrhunderts findet man, indem man die Jahreszahl des laufenden Jahrhunderts, z. B. 83 durch 4 dividiert, den erhaltenen Quotienten ohne Berücksichtigung des sich ergebenden Restes zu dieser Jahreszahl addiert und die gefundene Summe durch 7 dividiert: der Rest zeigt den Wochentag des 1. Juni, wenn der Sonntag durch 0, der Montag durch 1, der Dienstag durch 2 ꝛc, ausgedrückt wird.

Aufgabe. Auf welchen Wochentag fällt der 1. Juni im Jahre 1883?

Auflösung. $83 : 4 = 20$; $(83 + 20) : 7 = 103 : 7 = 14$

```
103 : 7 = 14
 7
 --
 33
 28
 --
  5
```

Somit fällt der 1. Juni im Jahre 1883 auf einen Freitag.

Um den Wochentag eines anderen gegebenen Datums zu finden, zählt man vom 1. Juni vor- oder rückwärts, hiebei werden volle Monate zu 31 Tagen durch 3, mit 30 Tagen durch 2, der Februar im Schaltjahr durch 1, im Gemeinjahr durch 0 ausgedrückt.

Zur näheren Erklärung diene folgendes Beispiel.

Auf welchen Wochentag fiel der 16. August 1876?

Auflösung: 76 : 4 = 19; (76 + 19) : 7 = 95 : 7 = 13

7

25

21

4

Man findet durch die oben angegebene Berechnung, daß im Jahre 1876 der 1. Juni auf einen Donnerstag fiel, der 1. Juli auf einen zwei Tag späteren Wochentag, d. i. auf einen Samstag, der 1. August auf einen 3 Tag späteren Wochentag, also auf einen Dienstag, der 8. und 15. ebenfalls auf einen Dienstag, mithin der 16. August auf einen Mittwoch.

Auf welchen Wochentag fiel der 15. April 1877?

Auflösung. 77 : 4 = 19; (77 + 19) : 7 = 96 : 7 = 13

7

26

21

5.

Durch Berechnung ergibt sich, daß der 1. Juni im Jahre 1877 auf einen Freitag fiel, der 1. Mai auf einen 3 Tage früheren Wochentag, d. i. auf einen Dienstag, der 1. April auf einen 2 Tage früheren Wochentag, d. i. auf einen Sonntag, ebenso der 8. und 15. April auf einen Sonntag.

Der berühmte im Jahre 1855 verstorbene Mathematiker Gauß hat zur Auffindung des Datums für den Ostersonntag im Verlaufe unseres Jahrhunderts nachstehende Formel angegeben.

Man dividiere die um 14 vermehrte Jahrzahl des laufenden Jahrhunderts durch 19 und nenne den dabei verbleibenden Rest a, dividiere die Jahrzahl durch 4 und nenne den Rest b, dividiere die um 1 vermehrte Jahrzahl durch 7 und nenne den Rest c, man dividiere ferner 19a + 23 durch 30 und nenne den Rest d, endlich dividiere man 2b + 4c + 6d + 4 durch 7 und nenne den Rest e. Alsdann fallt der Ostersonntag auf den (22 + d + e)ten März oder den (d + e — 9)ten April.

Aufgabe: Mit Benützung dieser Formel soll Ostern für das Jahr 1883 berechnet werden.

Auflösung. $(83 + 14) : 19 = 97 : 19 = 5$

$$\begin{array}{l} 95 \\ \hline 2 \end{array}$$

$83 : 4 = 20$; $(83 + 1) ; 7 = 84 : 7 = 12$

$$\begin{array}{l} 8 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7 \\ \hline 14 \\ 14 \\ \hline - \end{array}$$

a = 2
b = 3
c = 0
d = 1
e = 2

$(\overset{38}{19 \cdot 2} + 23) : 30 = 61 : 30 = 2$

$$\begin{array}{l} 60 \\ \hline 1 \end{array}$$

$(2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4) : 7 = 16 : 7 = 2$

$$\begin{array}{l} 14 \\ \hline 2 \end{array}$$

also ist Ostern den $(22 + 1 + 2)$ten März od. den $(1 + 2 - 9)$ten April.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 29 bis 32 incl.

IV. Multiplikation.

Beispiele.

1. Das monatliche Einkommen eines Mannes beträgt 180 ℳ 60 ₰. Welches ist sein Einkommen in einem Jahre?

180 ℳ 60 ₰ · 12

60 ₰ · 12 = 720 ₰ = 7 ℳ 20 ₰
180 ℳ · 12 = 2160 „
2167 ℳ 20 ₰

beträgt sein jährliches Einkommen;

oder:

180 ℳ 60 ₰ · 12 = 18060 ℳ · 12

36120
18060

216720 ₰ : 100 = 2167 ℳ 20 ₰

beträgt sein jährliches Einkommen.

2. Jemand verdient monatlich 15 £ 12 sh 5 d. Wie viel beträgt sein jährlicher Verdienst?

Da 1 Jahr = 12 Monate, so beträgt das jährliche Einkommen 12 mal 15 £ 12 sh 5 d und man hat

5 d . 12	12 sh · 12	15 £ · 12
60 d : 12 = 5 sh	144 sh	180 £
— d	+ 5 sh	+ 7 „
	149 sh : 20 = 7 £	187 £
	9 sh	

Das jährliche Einkommen beträgt 187 £ 9 sh — d

oder:

15 £ 12 sh 5 d · 12 =

[((15 · 20 + 12) · 12 + 5) · 12] d =

[(312 · 12 + 5) · 12] d =

[3749 · 12] d = 44988 d

44888 d : 12 = 3749 sh : 20 = 187 £

— d 9 sh

Das jährliche Einkommen beträgt 187 £ 9 sh — d

oder:

15 £ 12 sh 5 d · 12 =

15 £ 15 · 20 sh = 300 sh

\+ 12 sh

312 sh = 312 · 12 d = 3744 d

\+ 5 d

3749 d · 12 =

7498

3749

44988 d : 12 =

= 3749 sh : 20 =

= 187 £ 9 sh

Das jährliche Einkommen beträgt 187 £ 9 sh — d.

3. Jemand kauft einen Bauplatz, welcher 25 a 8 qm groß ist und bezahlt das qm mit 4 ℳ 20 ₰. Was hat er zu bezahlen?

25 a 8 qm = 2508 qm; 4 ℳ 20 ₰ = 420 ₰

2508 · 420 ₰ =

50160
10032

1053360 ₰ : 100 = 10533 ℳ 60 ₰ muß er bezahlen.

Aus dem Begriffe der Multiplikation folgt, daß lediglich der Multiplikand eine benannte Zahl sein kann, der Multiplikator aber eine unbenannte Zahl sein muß oder als solche anzunehmen ist. Das Produkt erhält die Benennung des Multiplikanden.

Um mehrfach benannte Zahlen zu multiplizieren, beginnt man die Multiplikation bei der niedrigsten Ordnung, reduziert das Produkt auf Einheiten der nächst höheren Ordnung und addiert diese zu dem Produkte, welches man durch Multiplikation dieser Ordnung erhalten hat.

Man kann auch mehrfach benannte Zahlen auf Einheiten der niedrigsten Ordnung reduzieren, diese sodann multiplizieren und das Produkt wieder in mehrfach benannte Zahlen verwandeln, ein Verfahren, welches wieder bei benannten Zahlen mit decimaler Teilung besonders vorteilhaft ist.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 32, 33 und 34.

V. Division.

Beispiele.

1. Ein Bote legte einen Weg von 7 Meilen in 11 h 55′ 24″ zurück, wie lange brauchte er zu 1 Meile?

11 h 55′ 24″ : 7 = 1 h
7
4 h = 4 · 60′
240′
+ 55′
295′ : 7 = 42′
28
15
14
1′ = 1 · 60″
60″
+ 24″
84″ : 7 = 12″

Den Weg von 1 Meile legte er zurück in 1 h 42′ 12″.

2. Von einer Ware erhält man für 1 ℳ 9 ℔ 250 g, was hat man für 6 Ztr 46 ℔ zu bezahlen?

9 ℔ 250 g	6 Ztr. 46 ℔
9 ℔ = 9 · 500 g	6 Ztr. = 6 · 100 ℔
4500 g	600 ℔
+ 250 g	+ 46 ℔
4750 g	646 ℔ = 646 · 500 g
	323000 g

323000 : 4750 = 68 ℳ hat man für 6 Ztr 46 ℔ zu bezahlen, wenn man für 1 ℳ 9 ℔ 250 g erhält.

```
 28500
—38000
 38000
```

Aus vorstehenden Beispielen folgt:

Bei der Division benannter Zahlen sind drei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle ist der Divisor eine unbenannte Zahl, im zweiten Falle ist der Divisor als eine unbenannte Zahl zu denken und endlich im dritten Falle hat der Divisor mit dem Dividenden gleichartige Benennung.

1. Während man bei den vorausgehenden Grundrechnungsarten die Rechnung bei der niedrigsten Einheit begann, fängt man dieselbe bei der Division bei der höchsten Einheit an, indem man den etwaigen Rest der höheren Einheiten in die nächst niederen Einheiten auflöst.

2. Enthalten Dividend und Divisor Einheiten verschiedener Ordnung, so verwandle man alles in Einheiten der niedrigsten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung und dividiere hierauf.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 35 und 36.

d) Einfache Umfangs-, Flächen- und Körperberechnung.

Im Anschlusse an die vier Grundrechnungsarten dürfte hier der Berechnung des Umfanges, des Flächen- und Kubik-Inhaltes in Kürze Erwähnung geschehen.

Alles, was einen begrenzten Raum einnimmt, ist ein Körper. Derselbe hat eine dreifache Ausdehnung: Länge, Breite und Höhe (Dicke).

Die Grenzen eines Körpers nennt man Fläche. Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen, nämlich Länge und Breite. Die Grenze einer Fläche ist eine Linie, sie hat nur eine Ausdehnung, nämlich die Länge.

1. Umfangsberechnung.

Man erhält den Umfang (Perimeter) einer Fläche, wenn man die Seiten derselben addiert.

Beispiel 1. Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen erste Seite 7 dm, dessen zweite Seite 1 m und dessen dritte Seite 1 m 3 dm lang ist?

P = 7 dm + 10 dm + 13 dm = 30 dm = 3 m.

Beispiel 2. Der Umfang eines Viereckes beträgt 16 m. Die eine Seite 3 m, eine Seite 5 m, und eine Seite 4 m. Wie lang ist die 4. Seite?

S = 16 — (3 + 5 + 4) = 16 — 12 = 4 m ist die vierte Seite lang.

Aufgaben.

Aufgabensammlung 37 und 38.

2. Flächenberechnung.

Den Inhalt einer Fläche findet man, wenn man Länge und Breite miteinander multipliciert.

F = L · B.

Beispiel 1. Ein Bauplatz ist 12 m lang und 7 m breit. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

F = 12 · 7 = 84 qm ist der Flächeninhalt des Bauplatzes.

Beispiel 2. Ein Acker hat einen Flächeninhalt von 12 a. Seine Länge beträgt 60 m. Wie breit ist derselbe?

B = F : L = 1200 : 60 = 20 m ist die Breite des Ackers.

Beispiel 3. Eine Wiese hat einen Flächeninhalt von 1 ha, die Breite derselben beträgt 100 m. Welches ist ihre Länge?

L = F : B = 10000 : 100 = 100 m ist die Länge der Wiese.

Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 39.

3. Körperberechnung.

Den Inhalt eines Körpers findet man, wenn man Länge, Breite (Dicke) und Höhe (Tiefe) miteinander multipliciert.

Beispiel 1. Ein Holzstoß hat eine Länge von 7 m, eine Breite von 2 m und eine Höhe von 3 m. Welches ist sein Kubikinhalt?

$K = L \cdot B \cdot H = 7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ cbm ist der Kubikinhalt des Holzstoßes.

Beispiel 2. Ein Saal hat einen Kubikinhalt von 8400 cbm seine Länge ist 60 m und seine Breite 20 m. Welche Höhe hat dieser Saal?

$H = K : (L \cdot B) = 8400 : 1200 = 7$ m ist die Höhe des Saales.

Aus vorstehenden Beispielen geht hervor:

Ist der Flächeninhalt gegeben und die Länge, so findet man die Breite, wenn man den Flächeninhalt durch die Länge dividiert und umgekehrt.

Ist der Kubikinhalt gegeben und zwei Ausdehnungen z. B. Länge und Breite, so findet man die dritte Ausdehnung, wenn man den Kubikinhalt durch das Produkt der beiden gegebenen Ausdehnungen dividiert.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 40.

e) Durchschnittsrechnungen.

Beispiele.

1. Das arithmetische Mittel der Zahlen 9, 8, 7, 4, 5, 3?

$$\frac{9 + 8 + 7 + 4 + 5 + 3}{6} = 6$$

2. Der niedrigste Preis des Zentners Weizen beträgt 8 fl 50 nkr ö. W., der höchste 9 fl 40 nkr ö. W. Welches ist der Durchschnittspreis?

$$= \frac{8 \text{ fl } 50 \text{ nkr} + 9 \text{ fl } 40 \text{ nkr}}{2}$$

$$= \frac{17 \text{ fl } 90 \text{ nkr}}{2} = 8 \text{ fl } 95 \text{ nkr ö. W.}$$ ist der Durchschnittspreis.

3. Ein Thermometer zeigt mittags 12 Uhr an den einzelnen Tagen einer Woche folgende Wärmegrade nach Réaumur: 14^0, 17^0, 16^0, 22^0, 19^0, 18^0, 20^0. Welches ist der mittlere Thermometerstand dieser Woche?

Der Thermometerstand ist

$$(14^0 + 17^0 + 16^0 + 22^0 + 19^0 + 18^0 + 20^0) : 7 = 126^0 : 7 = 18^0.$$

4. Ein Weinhändler kauft dreierlei Weine: 7 hl 60 l, das l zu 2 ℳ 50 ₰, 4 hl 96 l, das l zu 2 ℳ 75 ₰ und 3 hl 5 l, das l zu 3 ℳ 20 ₰. Diese 3 Sorten mischt er zusammen mit 39 l Wasser, wie hoch kommt 1 l der Mischung?

760 l à 2 ℳ 50 ₰	kosten 760 . 250 ₰	=	1900 ℳ
496 l à 2 „ 75 „	kosten 496 . 275 „	=	1364 „
305 l à 3 „ 20 „	kosten 305 . 320 „	=	976 „
39 l	— —		—
1600 l kosten zusammen			4240 ℳ

1 l kostet somit durchschnittlich

42 (40 : 16 (00 = 2 ℳ
32
1040 ℳ = 1040 . 100
1040 (00 : 16 (00 = 65 ₰
96
80
80
—

1 Liter kostet somit 2 ℳ 65 ₰.

Aus vorstehenden Beispielen folgt:

Den Durchschnitt zweier oder mehrerer Zahlen (die Durch-

schnittszahl, das arithmetische Mittel) findet man, wenn man die Summe der Angaben durch ihre Zahl dividiert.

Fragen und Aufgaben.
Aufgabensammlung Seite 40 und 41.

Vermischte Aufgaben über die vier Grundrechnungsarten mit benannten Zahlen.

Aufgabensammlung Seite 41 bis 48.

4. Teilbarkeit der Zahlen.

1. Erklärungen.

Eine ganze Zahl heißt durch eine andere **teilbar,** wenn die letztere in der ersten **ohne Rest** enthalten ist, die Division also eine **ganze Zahl** als Quotienten gibt.

Eine ganze Zahl, welche **in einer anderen ohne Rest** enthalten ist, heißt ein **Teiler** oder ein **Maß** dieser Zahl.

Eine **ganze Zahl, in welcher eine andere ohne Rest** enthalten ist, wird ein **Vielfaches** (Dividuus) dieser Zahl genannt.

Jede Zahl hat 1 und sich selbst zum Maße, d. h. jede Zahl ist durch 1 und sich selbst teilbar.

Die Zahlen, welche nur 1 und sich selbst zum Maße haben, heißen **absolute Primzahlen (Primzahlen an und für sich)** z. B. 1, 3, 5, 7, 19 2c.

Im Gegensatze zu diesen werden die Zahlen, welche auch andere Zahlen zum Maße haben, **zusammengesetzte Zahlen** genannt, z. B. 4, 6, 8, 9, 16, 24.

Die einfachen Faktoren, in welche jede zusammengesetzte Zahl zerlegt werden kann, heißen **Primfaktoren.**

Je zwei ganze Zahlen haben immer 1 zum gemeinschaftlichen Maße.

Zwei oder mehrere Zahlen, welche nur 1 zum gemeinschaftlichen Maße haben, werden **relative Primzahlen (Primzahlen unter sich)** genannt.

Z. B. 7 u. 18; 6, 17 u. 49.

Anm. Zwei aufeinanderfolgende Zahlen sind immer Primzahlen unter sich, z. B. 6 u. 7, 10 u. 11, 17 u. 18, 15 u. 16.

2. Kennzeichen der Teilbarkeit.

1. Eine Zahl ist durch 2, 4, 8, 16 ꝛc. teilbar, wenn ihre eine, zwei, drei, vier letzten Stellen, als Zahlen für sich betrachtet, beziehungsweise Vielfache von 2, 4, 8, 16 ꝛc. sind.

Es ist z. B. 34 durch 2 teilbar, weil 4 durch 2 teilbar ist; 348 durch 4, weil 48 : 4 = 12 ist; 3488 durch 8, weil 488 ein Vielfaches von 8 ist; 32576 durch 16, weil 2576 ein Vielfaches von 16 ist. (2576 : 16 = 161).

2. Eine Zahl ist durch 3 oder 9 teilbar, wenn die Quersumme ihrer Ziffern ein Vielfaches von 3 oder 9 ist.

z. B. 285 ist durch 3 teilbar, weil $(2 + 8 + 5) : 3 = 15 : 3 = 5$ ist. 70425 ist durch 9 teilbar, weil $(7 + 0 + 4 + 2 + 5) : 9 = 18 : 9 = 2$ ist.

3. Eine Zahl ist durch 5, 25, 125 u. s. w. teilbar, wenn bezüglich ihre ein, zwei, drei ꝛc. letzten Stellen, als Zahlen für sich betrachtet, entweder 0, 00, 000, oder ein Vielfaches von 5, 25, 125 u. s. w. sind.

z. B. 105 ist durch 5 teilbar, 5 : 5 = 1.
30875 ist durch 25 teilbar, weil 75 : 25 = 3.
90625 ist durch 125 teilbar, weil 625 : 125 = 5.

4. Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist; sie ist durch 12 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist; sie ist durch 15 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar ist; durch 18 ist eine Zahl teilbar, wenn sie durch 2 und ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Es ist z. B. 912 durch 6 teilbar, weil sie durch 2 und 3 teilbar ist; 1224 ist durch 12 teilbar, weil sie durch 3 und 4 teilbar ist. 90 ist durch 15 teilbar, weil sie durch 3 und 5 teilbar ist. 126 ist durch 18 teilbar, weil sie durch 2 und ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

5. Eine Zahl ist durch 10, 100, 1000 u. s. w. teilbar, wenn ihre ein, zwei, drei u. s. w. letzten Stellen aus 0 bestehen.

6) Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz aus der Summe ihrer ungeraden Stellen und aus der Summe ihrer geraden entweder 0 oder 11 oder ein Vielfaches von 11 ist.

Z. B. 92543 ist durch 11 teilbar, denn $(9 + 5 + 3) - (2 + 4) = 17 - 6 = 11$.
705958 ist durch 11 teilbar, denn $(7 + 5 + 5) - (0 + 9 + 8) = 17 - 17 = 0$.

3. Zerlegung in Primfaktoren.

Soll eine zusammengesetzte Zahl in Primfaktoren zerlegt werden, so dividiert man zunächst mit der kleinsten Primzahl, die zugleich Teiler ist, in die gegebene Zahl, den so gefundenen Quotienten dividiert man abermals durch seinen kleinsten Primteiler und fährt so fort, bis sich der letzte Quotient als eine Primzahl ergibt.

Die so gefundenen Primteiler sind die Primfaktoren der gegebenen zusammengesetzten Zahl.

Z. B.

$$\begin{aligned} 4620 : 2 &= 2310 \\ 2310 : 2 &= 1155 \\ 1155 : 3 &= 385 \\ 385 : 5 &= 77 \\ 77 : 7 &= 11 \\ 11 : 11 &= 1 \\ \hline 4620 &= 2 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 4620 &= 2 . 2310 \\ &= 2 . 2 . 1155 \\ &= 2 . 2 . 3 . 385 \\ &= 2 . 2 . 3 . 5 . 77 \\ &= 2 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 4620 &: 2 \\ 2310 &: 2 \\ 1155 &: 3 \\ 385 &: 5 \\ 77 &: 7 \\ 11 &: 11 \\ \hline 4620 &= 2 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11. \end{aligned}$$

Viele Zahlen geben bei ihrer Zerlegung nur gleiche Primfaktoren.

Z. B. $64 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2$
$2401 = 7 . 7 . 7 . 7.$

Solche aus gleichen Faktoren bestehenden Produkte nennt man, wie schon früher bemerkt, **Potenzen;** der **gleiche Faktor** heißt **Grundzahl (Basis)** und die **Anzahl der gleichen Faktoren** heißt **Exponent.**

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ (ausgesprochen 3 hoch 4 oder 3 in der 4. Potenz.

In der **Potenz** 3^4 ist 3 die **Grundzahl (Basis)**, 4 der **Exponent.**

Wenn zusammengesetzte Zahlen aus gleichen und ungleichen Primfaktoren bestehen, so schreibt man die gleichen Faktoren gewöhnlich als Potenzen.

Z. B.

$$\begin{aligned} 14850 : 2 &= 7425 \\ 7425 : 3 &= 2475 \\ 2475 : 3 &= 825 \\ 825 : 5 &= 165 \\ 165 : 5 &= 33 \\ 33 : 3 &= 11 \\ 11 : 11 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14850 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \\ &= 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 \end{aligned}$$

oder einfacher

$$\begin{aligned} 14850 &: 2 \\ 7425 &: 3 \\ 2475 &: 3 \\ 825 &: 5 \\ 165 &: 5 \\ 33 &: 3 \\ 11 &: 11 \\ 1 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14850 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \\ &= 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11. \end{aligned}$$

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 48.

4. Der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor.

Unter dem größten gemeinschaftlichen Teiler oder Divisor zweier oder mehrerer Zahlen versteht man jene größte Zahl, welche in den gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten ist.

Dieser größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor kann auf dreierlei Art gefunden werden:

1) durch Zerfällen in ihre Primfaktoren,
2) durch Division,
3) durch eine Vereinigung beider Verfahrungsweisen.

Der größte gemeinschaftliche Teiler oder **Divisor** für zwei oder mehrere Zahlen wird gefunden, wenn man die **Zahl** in ihre **Primfaktoren** zerlegt.

Das Produkt der gemeinschaftlichen Primfaktoren ist der größte Teiler (Divisor) oder das größte gemeinschaftliche Maß.

Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor der beiden Zahlen 816 und 912?

816 : 2 = 408	912 : 2 = 456
408 : 2 = 204	456 : 2 = 228
204 : 2 = 102	228 : 2 = 114
102 : 2 = 51	114 : 2 = 57
51 : 3 = 17	57 : 3 = 19
17 : 17 = 1	19 : 19 = 1
816 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 17	912 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 19

oder

816 = 2 . 408	912 = 2 . 456
= 2 . 2 . 204	= 2 . 2 . 228
= 2 . 2 . 2 . 102	= 2 . 2 . 2 . 114
= 2 . 2 . 2 . 2 . 51	= 2 . 2 . 2 . 2 . 57
= 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 17	= 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 19

Beide Zahlen 816 und 912 haben folgende Primfaktoren gemeinschaftlich:

2 . 2 . 2 . 2 . 3 . = 48

48 ist also **der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor** der beiden Zahlen 816 und 912.

Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler (Divisor) der Zahlen 360, 240, 540, 600?

1. Art: Durch Zerfällen ihrer Primfaktoren.

360 : 2 = 180	240 : 2 = 120
180 : 2 = 90	120 : 2 = 60
90 : 2 = 45	60 : 2 = 30
45 : 3 = 15	30 : 2 = 15
15 : 3 = 5	15 : 3 = 5
5 : 5 = 1	5 : 5 = 1
$360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5$	$240 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5$
$= 2^3 . 3^2 . 5$	$= 2^4 . 3 . 5$
540 : 2 = 270	600 : 2 = 300
270 : 2 = 135	300 : 2 = 150
135 : 3 = 45	150 : 2 = 75
45 : 3 = 15	75 : 3 = 25
15 : 3 = 5	25 : 5 = 5
5 : 5 = 1	5 : 5 = 1
$540 = 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5$	$600 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 5$
$= 2^2 . 3^3 . 5$	$= 2^3 . 3 . 5^2$

Die Zahlen haben folgende Primfaktoren gemeinschaftlich:

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Anm. Der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor ist das Produkt der niedrigsten Potenzen der gemeinschaftlichen Zahlen.

2. Art. Durch Division.

Um den **größten gemeinschaftlichen Teiler (Divisor)** zweier Zahlen zu finden, dividiert man die größere Zahl durch die kleinere und dann den Divisor durch den jedesmaligen Rest. **Der letzte Divisor ist dann der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen.**

Bleibt 1 als Rest, so sind die Zahlen Primzahlen unter sich, d. h. die Zahlen haben keinen gemeinschaftlichen Divisor.

Z. B. Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen 816 und 912?

912 : 816 = 1
816
816 : 96 = 8
768
96 : 48 = 2
96 —
– –

Der **größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen** 816 und 912 ist **48**.

Soll zu mehr als zu zwei Zahlen der größte gemeinschaftliche Teiler gesucht werden, so sucht man denselben zunächst von irgend zwei der gegebenen Zahlen, hierauf von dem eben gefundenen Teiler und einer dritten Zahl u. s. w. bis zur letzten der gegebenen Zahlen. **Der zuletzt gefundene Divisor ist dann der größte gemeinschaftliche Teiler für sämtliche Zahlen.**

Z. B. welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler für die Zahlen 360, 240, 540, 600?

360 : 240 =
240 : 120 = 2
0

540 : 120 = 4
120 : 60 = 2
0

600 : 60 = 10

60 ist also der **größte gemeinschaftliche Teiler** dieser 4 Zahlen.

3. Art. Wenn sich bei kleineren Zahlen die gemeinschaftlichen Faktoren sogleich erkennen lassen, so scheidet man diese aus und dividiert durch sie die vorliegenden Zahlen. Sind sämtliche Quotienten relative Primzahlen, so ist das **Produkt der ausgeschiedenen Faktoren der gesuchte größte gemeinschaftliche Teiler.**

Z. B.

	360,	240,	540,	600
2	180,	120,	270,	300
2	90,	60,	135,	150
3	30,	20,	45,	50
5	6,	4,	9,	10

2 · 2 · 5 · 5 = 60 **ist der größte gemeinschaftliche Teiler.**

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung S. 48.

5. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier oder mehrerer Zahlen versteht man jene kleinste Zahl, in welcher alle gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten sind.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache kann auf folgende Weise gefunden werden:

1. Art. Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren und nehme jeden Primfaktor so oft als Faktor in das gemeinschaftliche Vielfache auf, als er in derjenigen Zahl enthalten ist, in welcher er am öftesten vorkommt.

Die Zahlen, welche in einer andern enthalten sind, streiche man weg.

Z. B. Man suche für folgende Zahlen: 5, 8, 15, 24, 30 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

~~5~~ ~~8~~ ~~15~~ 24 30

24 = 2 · 2 · 2 · 3   Kleinstes gemeinschaftliche Vielfache

30 = 2 · 3 · 5   2 · 2 · 2 · 3 · 5 = 120

2. Art. Auch durch folgende Regel kann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache gesucht werden.

a) Streiche diejenigen Zahlen weg, welche in der andern ohne Rest enthalten sind.

b) Suche hierauf die gemeinschaftlichen Teiler von zwei oder mehreren übrigen Zahlen heraus, dividiere durch dieselben und fahre damit so lange fort, bis die erhaltenen Quotienten und die nicht teilbaren Zahlen relative Primzahlen sind.

c) Multipliziere die herausgestellten gemeinschaftlichen Faktoren mit den relativen Primzahlen. **Das erhaltene Produkt** ist das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache.**

Z. B. 1. 5, 8, 15, 24, 30.

	~~5~~, ~~8~~, ~~15~~, 24, 30
2	12, 15
3	4, 5

Das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** ist 2 · 3 · 4 · 5 = 120

2. Man suche für folgende Zahlen: 15, 21, 28, 40, 48 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

	15,	21,	28,	40,	48
2	15,	21,	14,	20,	24
2	15,	21,	7,	10,	12
2	15,	21,	7,	5,	6
3	5,	~~7~~,	7,	~~5~~,	2

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 = 1680.$

Fragen und Aufgaben.
Aufgabensammlung S. 49.

---

5. Decimalbrüche.*)

a) Erklärung.

Lesen und Schreiben.

Die Haupteigenschaft des dekadischen Zahlensystems besteht darin, daß jede Ziffer, wenn sie um eine Stelle nach rechts gerückt wird, einen 10mal kleineren Wert hat. Wenn man nun dieses Zahlensystem auf die Brüche ausdehnt, so entstehen dadurch die **Decimalbrüche;** oder bildet man eine Reihe Brüche in der Weise, daß man zum Nenner eine Eins mit so vielen Nullen nimmt, als der Zähler Ziffern hat, wie $\frac{7}{10}$, $\frac{22}{100}$, $\frac{447}{1000}$ ꝛc., so ist es nicht nötig, den Nenner anzuschreiben, weil er aus dem Zähler dadurch bestimmt wird, daß für jede Ziffer im Zähler eine 0 im Nenner gedacht wird. Die einzelnen Ziffer des ohne Nenner geschriebenen Zählers nennt man Decimalen, welche von den etwa vorhandenen Ganzen durch ein Komma getrennt werden. Sind keine Ganzen vorhanden, so wird an deren Stelle eine 0 gesetzt.

Die auf diese Art geschriebenen Brüche, welche also nur die Zahl 10 oder eine Potenz von 10 zum Nenner haben, heißen **Decimalbrüche.**

Z. B. $\frac{3}{10} = 0{,}3$ $\frac{33}{70} = 0{,}33$ $\frac{449}{1000} = 0{,}449$ $2\frac{37}{100} = 2{,}37$

Anm. Die Decimalbrüche sind nichts anderes als die Fortsetzung des dekadischen Zahlensystems unter die Einheit.

Z. B. 6783,53675

6 Tausender	5 Zehntel
7 Hunderter	3 Hundertel
8 Zehner	6 Tausendtel
3 Einheiten	7 Zehntausendtel
vor dem Komma	5 Hunderttausendtel
	nach dem Komma.

---

*) Auch Dezimalbrüche.

Wenn der Nenner eines Decimalbruches immer eine 1 mit so vielen 0 ist, als der Zähler Ziffern hat, so muß auch umgekehrt der Zähler immer so viele Ziffern haben, als der Nenner 0 hat.

Ist der Bruch $\frac{3}{100}$ gegeben, so hat hier der Zähler nur eine Ziffer 3; der Zähler muß aber, wenn der Bruch $\frac{3}{100}$ als Decimalbruch geschrieben werden soll, 2 Ziffern haben, weil der Nenner 2 Nullen hat.

Es wird daher der Zahl 7 eine Null vorgesetzt, die keinen Wert hat, aber den Wert des 3 um das Zehnfache verringert; es ist also $\frac{7}{100} = 0{,}07$; ebenso ist $\frac{7}{10000} = 0{,}0007$; $3\frac{37}{10000} = 3{,}0037$

Ein Decimalbruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man demselben eine oder mehrere Nullen anhängt. Indem man nämlich dem Decimalbruch eine Null anhängt, wird auch dem dazu gedachten Nenner eine Null angehängt, da der ganze Bruch sowohl im Nenner als im Zähler mit 10 multipliziert, d. h. erweitert worden ist.

3 B. $$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000} = \frac{37}{10000}$$

oder

$$0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000$$

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 49, 50 und 51.

b) Addition der Decimalbrüche.

Beispiel:

$$347{,}632 + 5{,}05439 + 10{,}3 + 0{,}000475 + 1237{,}1456 + 4{,}2 + 16{,}57545 = 1620{,}907915$$

oder

```
 347,632
   5,05939
  10,3
   0,000475
1237,1456
   4,2
  16,57545
-----------
1620,907915
```

Hieraus folgt:

Decimalbrüche werden addiert, indem man die gleichnamigen Stellen wie bei ganzen Zahlen addiert.

Am einfachsten schreibt man bei der Addition die Decimalbrüche so untereinander, daß genau Komma unter Komma zu stehen kommt, wodurch dann von selbst die gleichnamigen Stellen in einer Reihe erscheinen.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 52 und 53.

c) Subtraktion der Decimalbrüche.

238,26375 — 86,97543 = 151,28832

oder

$$\begin{array}{r} 238{,}26375 \\ 86{,}07643 \\ \hline 151{,}28832 \end{array}$$

67,245 — 11,0047865 = 56,2402135

oder

$$\begin{array}{r} 67{,}2450000 \\ 11{,}0047865 \\ \hline 56{,}2402135 \end{array}$$

32,347958 — 9,526 = 22,821958

$$\begin{array}{r} 32{,}347958 \\ 9{,}526000 \\ \hline 22{,}821958 \end{array}$$

Hieraus folgt:

Decimalbrüche werden von einander subtrahiert wie ganze Zahlen und zwar, indem man die gleichnamigen Stellen von einander subtrahiert (Komma unter Komma).

Hat der Subtrahend weniger Decimalstellen als der Minuend oder auch umgekehrt, so sind die fehlenden Stellen durch Nullen zu ersetzen.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 53 u. 54.

d) Addition und Subtraktion der Decimalbrüche.

Beispiel:

403,125 + 12,6017 + 4321,1 − 5,3 − 7,061 + 1,65 − 7,8379
= (403,125 + 12,6017 + 4321,1 + 1,65) − (5,3 + 7,061 + 7,8379)
= 4738,4767 − 20,1989
= 4718,2778

403,125	oder		
12,6017		5,3	
4321,1		7,061	
1,65		7,8379	
4737,4767	(Summe der positiven Glieder.)	20,1989	(Summe der negativen Glieder.)
−20,1989			
4718,2778			

Hieraus folgt:

Sollen Decimalbrüche teils addiert, teils subtrahiert werden, so zieht man von der Summe der positiven die Summe der negativen Glieder ab.

Fragen und Aufgaben.
Aufgabensammlung Seite 54 u. 55.

e) Multiplikation der Decimalbrüche.

Beispiele:

1. 38,406 · 0,23 = 8,8338

```
 38,406
   0,23
-------
 115218
 76812
-------
8,83338
```

2. 0,00718 · 23 =*0,016514

```
0,00718 · 23
-------
   2154
  1436
-------
0,016514
```

* Im Produkte werden die links fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt.

Hieraus folgt:

Decimalbrüche werden miteinander multipliziert, indem man sie ohne Rücksicht auf das Decimalkomma multipliziert und von dem Produkte so viele Decimalstellen von rechts nach links abschneidet, als die Faktoren zusammen haben.

Beispiele:

2,0784 · 100 = 207,84

0,653 · 10000 = 6530.

Hieraus folgt:

Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, 1000, 10000 ꝛc. multipliziert, wenn man das **Decimalkomma ein, zwei, drei, vier u. s. w. Stellen nach rechts rückt.**

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 55 und 56.

f) Division der Decimalbrüche.

Beispiele:

```
I. 75,36 : 24 = 3, 14
   72
   ---
   33
   24
   ---
    96
    96
   ---
    0
```

```
5,6088 : 4,56
  560,88 : 456 = 1,23
  456
  ----
  1048
   912
  ----
   1368
   1368
  -----
     0
```

```
II. 983,09 : 0,2657
  9830900 : 2657 = 3700
  7971
  -------
  18599
  18599
  -------
  - - - 00
```

```
III. 24625,6383 : 34,7121
  246256383 : 347121 = 723
  2082726
  --------
   798378
   694242
  --------
   1041363
   1041363
  --------
         0
```

Hieraus folgt:

Sollen Decimalbrüche durcheinander dividiert werden, so verwandle man den Divisor in eine ganze Zahl und rücke im Dividenden zugleich das Komma um so viele Stellen weiter nach rechts, als der Divisor Decimalstellen hat.

Sobald man im Dividenden bei der Division **über das Komma schreitet,** muß man im **Quotienten das Komma setzen,** da nach einem früheren Satze die erste Stelle **nach** dem Komma einen **zehnmal kleineren Lokalwert** hat und darnach auch der Lokalwert der betreffenden Ziffer im Quotienten zehnmal kleiner werden muß. Geht die Division nicht auf, so kann man die fehlenden Stellen im Dividenden durch Nullen ergänzen.

Die Division könnte auch auf folgende compliciertere Art erklärt werden:

1. **Hat der Dividend mehr Decimalstellen als der Divisor, so multipliziert man Dividend und Divisor mit 10 oder 100, 1000 u. s. w., so daß der Divisor eine ganze Zahl wird. Dann werden im Quotienten von rechts nach links so viele Decimalstellen abgeschnitten, als der Dividend nach der Multiplikation noch hat.**

2. **Hat der Divisor mehr Decimalstellen als der Dividend, so werden ebenfalls Dividend und Divisor mit einer Potenz von 10 multipliziert, welche den Divisor (also auch den Dividend) zu einer ganzen Zahl macht.**

3. **Zwei Decimalbrüche werden dividiert wie ganze Zahlen, wenn sie gleich viele Decimalstellen haben.**

Durch Anhängen von Nullen an den Dividend kann man die Division bis zu einer beliebigen Anzahl von Decimalstellen im Quotienten fortsetzen.

Beispiel:

$$14250,654 : 1000 = 14,250654.$$

Hieraus folgt:

Soll ein Decimalbruch durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividiert werden, so hat man nur das **Decimalkomma um ein, zwei, drei u. s. w. Stellen nach links zu rücken.**

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 56 und 57.

g) Multiplikation und Division der Dezimalbrüche.

Beispiel:

$3{,}23 \cdot 0{,}621 : 0{,}0437$

$2{,}00583 : 0{,}0437$

$20058{,}3 : 437 = \mathbf{45{,}9}$

Ausrechnung:

$3{,}23 \cdot 0{,}621$

323

646

1938

$2{,}00583 : 0{,}0437$

$20058{,}3 : 437 = \mathbf{45{,}9}$

2578

3933

Hieraus folgt:

Den Wert eines algebraischen Produktes oder einer Serie findet man, wenn man das Produkt aller Faktoren durch das Produkt aller Divisoren dividiert.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 57.

h) Die vier Grundrechnungsarten mit Dezimalbrüchen in Verbindung.

Beispiele:

1) $220 - 100 + 0{,}436 + 0{,}564 : 1{,}2 - 0{,}906$

$220 - 100 + 0{,}436 + 0{,}47 - 9{,}906$

$(220 + 0{,}436 + 0{,}47) - (100 + 9{,}906)$

$220{,}906 - 109{,}906$

$\mathbf{111}$

Ausrechnung:

$0{,}564 : 1{,}2$

$5{,}64 : 12 = 1{,}47$

2) $(4{,}25 \cdot 6{,}4 - 3{,}75 : 1{,}25) : 12{,}1$

$(27{,}2 - 3) : 12{,}1$

$24{,}2 : 12{,}1$

$242 : 121 = \mathbf{2}$

Ausrechnung:

$4{,}25 \cdot 6{,}4$

1700

2550

$27{,}200$

$3{,}75 : 1{,}25$

$375 : 125 = \mathbf{3}$

Hieraus folgt:

Die Operationen der zweiten Art, also Multiplikation und Division haben immer den Vorrang vor den Operationen der ersten Art, also der Addition und Subtraktion. Soll aber doch eine Operation der ersten Art den Vorrang haben, so muß dies durch eine Klammer angezeigt werden.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 57—60 incl.

i) Resolvieren mit Dezimalbrüchen.

Beispiele:

1) 0,2 Mark d. R.-W. sollen in Pf. verwandelt werden.
   0,2 · 100 = 20 Pf.
2) 6,5 Francs sollen in Centimes verwandelt werden.
   6,5 · 100 = 650 Centimes.
3) Wie viele Monate, Tage, Stunden, Minuten und Sekunden sind 0,937625 Jahre?

0,937652 a	=0,937652 · 12 Monate	= 11,251500 Monate
0,2515 Mon.	=0,2515 · 30 d	= 7,5450 d
0,545 d	=0,545 · 24 h	= 13,080 h
0,08 h	=0,08 · 60′	= 4,80′
0,8′	=0,8 · 60″	= 48″

Antwort: 0,937625 Jahre = 11 Monate 7 Tage 13 Stunden 4 Minuten 48 Sekunden.

Hieraus folgt:

Das Resolvieren geschieht durch **Multiplikation** der höheren Sorte mit der sogenannten **Reduktionszahl.**

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 60.

k) Reduzieren mit Dezimalbrüchen.

Beispiele:

1) 9647 Pf. d. R.-W. sollen in Mark reduziert werden!
   9647 : 100 = 96,47 Mark.

2) 7215 Centimes sollen in Francs verwandelt werden!
$$7215 : 100 = 72{,}15 \text{ Francs.}$$

3) Der wievielte Teil eines Jahres sind 11 Monate 7 Tage 13 Stunden 4 Minuten und 48 Sekunden?

$48'' = 48 : 60 = 0{,}8'$

$4{,}8' = 4{,}8 : 60 = 0{,}08 \text{ h}$

$13{,}08 \text{ h} = 13{,}08 : 24 = 0{,}545 \text{ d}$

$7{,}545 \text{ d} = 7{,}545 : 30 = 0{,}2515$ Monate

$11{,}1515$ Monate $= 11{,}2515 : 12 = 0{,}937525$ Jahre.

Antwort: 11 Monate 7 Tage 13 Stunden 4 Minuten 48 Sekunden = 0,937625 Jahre.

Hieraus folgt:

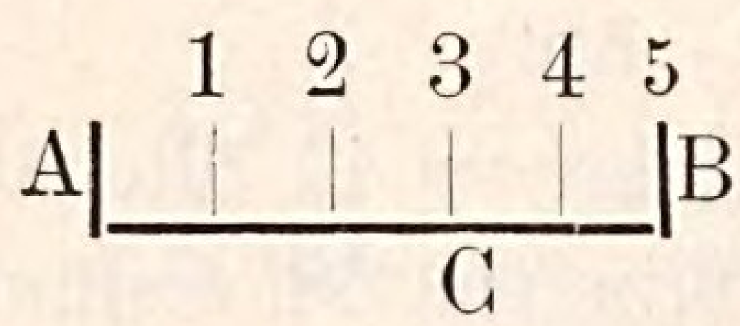
Das **Reduzieren** geschieht durch Division der niederen Sorte mit der **Reduktionszahl.**

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 63 und 61.

6. Die gemeinen Brüche.

a) Erklärungen.



$AB = 1$

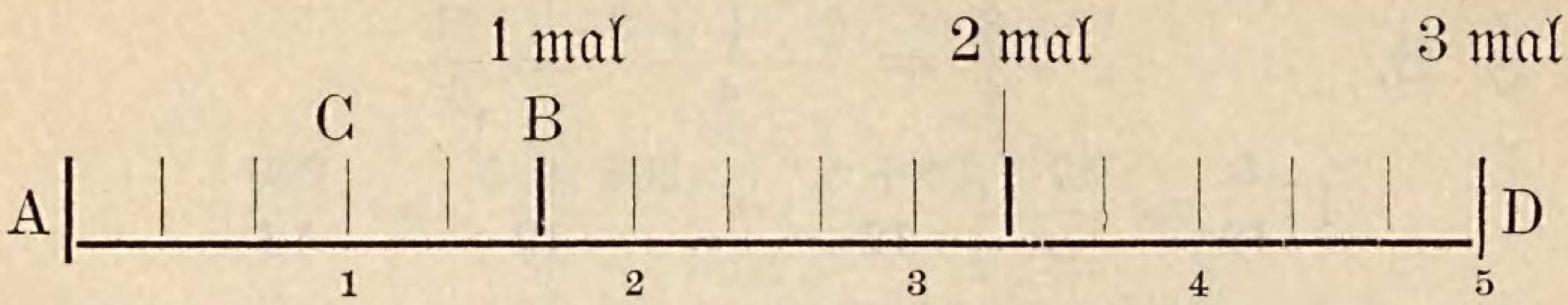
$AC = \frac{3}{5}$

$\frac{3}{5}$ entsteht dadurch, daß man die Einheit in fünf gleiche Teile teilt und 3 davon nimmt.

Die Zahl 5 gibt an, in wie viele Teile das Ganze geteilt wurde und heißt der **Nenner** des Bruches, die Zahl 3 sagt uns, wie viele **Teile** hievon genommen wurden; sie heißt der **Zähler** des Bruches.

Nach einer andern Vorstellungsweise können wir auch sagen $\frac{3}{5}$ ist der 5. Teil von 3. Wenn wir nämlich die Länge AB, die Einheit, 3 mal aneinander tragen und jede Einheit in 5 gleiche Teile teilen, so enthält AC 3 und AD 15 gleiche Teile, folglich läßt sich AC auf AD 5 mal auftragen, also ist AC der 5. Teil von AD;

nun ist aber AC $= \frac{2}{5}$ und AD $= 3$, somit ist $\frac{3}{5}$ = der 5. Teil oder 3 : 5.



Man sieht aus dieser zweiten Entstehungsweise, daß **ein Bruch** nichts anderes sei, als ein **formeller Quotient**, dessen **Dividend** der **Zähler** und dessen **Divisor** der **Nenner** ist, und daß deshalb die Sätze für formelle Quotienten nun auch für Brüche gelten.

Da beim Dividieren der Dividend geteilt oder gebrochen wird, so hat der **Quotient** auch den Namen **gebrochene Zahl** oder **Bruch.**

Der **Dividend** heißt dann **Zähler,** weil er die Teile zählt, der **Divisor** dagegen **Nenner,** da von ihm die Teile ihre Benennung erhalten. Statt der Divisionspunkte (:) bedient man sich eines von links nach rechts gerichteten Striches (—), über welchen der Zähler und unter den der Nenner geschrieben wird.

Ein **Bruch** entsteht dadurch, daß man **irgend ein Ganzes,** z. B. **die Linie A B in eine bestimmte Anzahl gleiche Teile teilt und davon einen oder mehrere nimmt.**

Ein Bruch, dessen Zähler größer ist als der Nenner oder größer als **1,** heißt ein **unechter Bruch.** Z. B. $\frac{12}{7}$.

Ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner oder kleiner als **1,** heißt ein **echter Bruch.** Z. B. $\frac{7}{12}$.

Eine **ganze Zahl mit einem echten Bruche** heißt eine **gemischte Zahl.** Z. B. $1\frac{5}{12} = 1 + \frac{5}{12}$.

Jeder **unechte** Bruch kann in eine **gemischte Zahl** verwandelt werden.

Die ganze Zahl ist der bei der Division gefundene Quotient.

Der Rest ist ein echter Bruch, welcher den Nenner des unechten Bruches als Nenner hat.

Anm. Das Additionszeichen läßt man bei gemischten Zahlen gewöhnlich weg.

Umgekehrt kann man jede **gemischte Zahl** in einen **unechten** Bruch verwandeln, dessen Zähler erhalten wird, wenn man zum

Produkte aus der ganzen Zahl und dem Nenner des beigefügten Bruches den Zähler des Bruches addiert.

Z. B. $7\frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{21}{4}$

$$17\frac{5}{12} = \frac{17 \cdot 12 + 5}{12} = \frac{204 + 5}{12} = \frac{209}{12}$$

Ein Bruch heißt **uneigentlicher**, wenn der Zähler gleich dem Nenner oder ein Vielfaches desselben, **der Wert des Bruches** also eine **ganze Zahl** ist.

Z. B. $\frac{4}{4} = 1$. $\frac{21}{7} = 3$.

Jede ganze Zahl läßt sich also in einen **uneigentlichen** Bruch verwandeln, dessen Zähler so oft durch den Nenner teilbar ist als die ganze Zahl angibt.

Z. B. $1 = \frac{4}{4}$ $3 = \frac{21}{7}$

$2 = \frac{6}{3}$ $4 = \frac{24}{6}$

$7 = \frac{63}{9} = \frac{28}{4}$

Anm. Jede Zahl läßt sich als ein Bruch betrachten, dessen Nenner 1 ist.

Z. B. $7 = \frac{7}{1}$ $6 = \frac{6}{1}$

Von mehreren Brüchen, welche **gleiche Nenner** haben, ist derjenige der **größte, der den größten Zähler** hat.

Z. B. von $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{9}{7}, \frac{14}{7}$ ist $\frac{14}{7}$ **der größte Bruch.**

Von mehreren Brüchen mit demselben Zähler ist derjenige **der größte**, der den **kleinsten Nenner** hat.

Z. B. von $\frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7}, \frac{5}{12}$ ist $\frac{5}{2}$ **der größte Bruch.**

Anm. Wann wird der Wert eines Bruches vergrößert, wann verkleinert?

Ein Bruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl

a) multipliziert oder

b) dividiert.

z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$

$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{15}{21}$

$\frac{14}{36} = \frac{14 : 2}{36 : 2} = \frac{7}{18}$

$\frac{36}{48} = \frac{36 : 6}{48 : 6} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$

(Anm. Der Beweis bleibt dem Unterrichte vorbehalten.)

Die erste dieser Veränderung heißt **Erweiterung**, die zweite **Kürzung** (Reduzierung) der Brüche.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so läßt sich dieser Bruch, ohne seinen Wert zu ändern, auf eine einfachere Form bringen oder vereinfachen, indem man Zähler und Nenner durch einen gemeinschaftlichen Teiler dividiert.

Sind Zähler und Nenner relative Primzahlen, so ist eine weitere Vereinfachung nicht mehr möglich.

z. B. $\frac{32}{48} = \frac{2 \cdot 16}{3 \cdot 16} = \frac{2}{3}$

$\frac{133}{209} = \frac{133 : 19}{209 : 19} = \frac{7}{11}$

Sollen Brüche mit einander verglichen werden, welche verschiedene Nenner haben, so verwandelt man dieselben in Brüche mit gleichen Nennern oder macht dieselben **gleichnamig.**

Dies wird dadurch bewerkstelligt, daß man zu den Nennern der gegebenen Brüche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sucht, welches der **gemeinschaftliche** oder **Hauptnenner (Generalnenner)** sämtlicher Brüche wird.

Die hiezu gehörigen Zähler findet man, wenn man den Hauptnenner durch jeden Nenner dividiert und mit diesen Quotienten die Zähler der einzelnen Brüche multipliziert.

Bei diesem Verfahren geschieht also nichts anderes, als daß Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert werden.

Folgende Brüche sollen auf gleiche Benennung gebracht werden:

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{13}{15}, \frac{11}{18}$

	2,	4,	10,	15,	18
2		2,	5,	15,	9
3		2,		5,	3
		2,		5,	3

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 180$ **ist der gemeinschaftliche Nenner oder Hauptnenner.**

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \,.\, 90}{2 \,.\, 90} = \frac{90}{180} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 45}{4 \,.\, 45} = \frac{135}{180}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{7 \,.\, 18}{10 \,.\, 18} = \frac{126}{180} \qquad \frac{13}{15} = \frac{13 \,.\, 12}{15 \,.\, 12} = \frac{156}{180}$$

$$\frac{11}{18} = \frac{11 \,.\, 10}{18 \,.\, 10} = \frac{110}{180}$$

Sind also die Brüche nach ihrer Größe zu ordnen, so hat man:

$$\frac{156}{180} > \frac{135}{180} > \frac{126}{180} > \frac{110}{180} > \frac{90}{180}$$

oder $$\frac{13}{15} > \frac{3}{4} > \frac{7}{10} > \frac{11}{18} > \frac{1}{2}$$

Aufgabensammlung Seite 61 und 62.

b) Addition der Brüche.

Beispiel:

$$\frac{4}{9} + \frac{6}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4 + 6 + 8}{9} = \frac{18}{9} = 2.$$

Hieraus folgt:

Brüche mit gleichen Nennern oder gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Summe ihrer Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{18 + 20 + 9 + 14}{24} = \frac{61}{24} = 2\frac{13}{24}$$

4, 6, 8, 12

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ **ist der gemeinschaftliche Nenner** (Hauptnenner oder Generalnenner).

Hieraus folgt:

Haben die Brüche verschiedene Nenner, so müssen dieselben zuvor gleichnamig gemacht werden und dann findet die vorhergehende Regel ihre Anwendung.

$$1)\ 9\frac{3}{4} + 12\frac{5}{6} + 8\frac{1}{3} + 15\frac{1}{2} + 1\frac{7}{12}$$
$$= 45 + \frac{9 + 10 + 4 + 6 + 7}{12}$$
$$= 45 + \frac{36}{12} = 45 + 3 = \mathbf{48}.$$

$$2)\ 4\frac{7}{8} + 2\frac{1}{7} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + 6\frac{5}{14} + 8\frac{1}{6}$$
$$= 20 + \frac{147 + 24 + 70 + 56 + 60 + 28}{168}$$
$$= 20 + \frac{385}{168} = 20 + 2\frac{49}{168} = 22\frac{7}{24}$$

	8, 7, 12, 3, 14, 6
2	4, 6, 7,
2	2, 3, 7

General= oder Hauptnenner 2 · 2 · 2 · 3 · 7 = 168.

Hieraus folgt:

Gemischte Zahlen werden addiert, wenn man zur Summe der ganzen Zahlen die Summe der echten Brüche addiert.

Aufgabensammlung Seite 62, 63 und 64.

c) Subtraktion der Brüche.

Beispiel:

$$\frac{12}{17} - \frac{9}{17} = \frac{12 - 9}{17} = \frac{3}{17}$$

Hieraus folgt:

Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, wenn man den Zähler des Subtrahenden vom Zähler des Minuenden subtrahiert und die erhaltene Differenz durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.

Beispiel:

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{21 - 20}{24} = \frac{1}{24}$$

Hieraus folgt:

Ungleichnamige Brüche müssen zuerst gleichnamig gemacht werden und dann findet die vorhergehende Regel Anwendung.

Beispiel:

$$18\frac{4}{5} - 7\frac{3}{8} = 11 + \frac{32 - 15}{40} = 11 + \frac{17}{40} = 11\frac{17}{40}$$

Hieraus folgt:

Sind gemischte Zahlen von einander zu subtrahieren, so addiert man zu der Differenz der ganzen Zahlen die Differenz der echten Brüche.

Beispiel:

$$106\frac{2}{7} - 84\frac{5}{6} = 22 + \frac{12 - 35}{42} = 21 + \frac{(42 + 12) - 35}{42}$$

$$= 21 + \frac{54 - 35}{42} = 21\frac{19}{42}$$

Hieraus folgt:

Ist bei gemischten Zahlen der echte Bruch des Minuenden kleiner als der des Subtrahenden, so addiert man zu ersterem eine Einheit des Ganzen.

Beispiel:

$$8 - \frac{7}{12} = 7\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = 7\frac{5}{12}$$

$$5 - 1\frac{3}{4} = 4\frac{4}{4} - 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Hieraus folgt:

Ist der Minuend eine ganze Zahl, so nehme man von dem vorhandenen Ganzen des Minuenden eine Einheit und verwandle dieselbe in den dem Subtrahenden gleichnamigen Bruch.

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 64 und 65.

d) Addition und Subtraktion der Brüche.

Beispiel:

1) $$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{7}{10}+\frac{5}{6}-\frac{5}{12}-\frac{7}{18}+\frac{287}{360}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{5}{6}+\frac{287}{360}\right)-\left(\frac{7}{10}+\frac{5}{12}+\frac{7}{18}\right)$$

$$=\frac{180+135+300+287}{360}-\frac{126+75+70}{180}$$

$$=\frac{902}{360}-\frac{271}{180}=\frac{902-542}{360}=\frac{360}{360}=\mathbf{1}.$$

2) $$6\frac{3}{4}-2\frac{2}{3}+17\frac{5}{9}-\frac{5}{6}-4\frac{1}{2}-8\frac{1}{6}+\frac{7}{36}$$

$$=9\frac{27-24+20-30-18-6+7}{36}$$

$$=9\frac{(27+20+7)-(24+30+18+6)}{36}$$

$$=9\frac{54-78}{36}=8\frac{(54+36)-78}{36}=8\frac{12}{36}=8\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}.$$

Hieraus folgt:

Sind Brüche oder gemischte Zahlen teils zu addieren, teils zu subtrahieren, so zieht man von der Summe aller zu addierenden positiven Glieder die Summe aller zu subtrahierenden negativen Glieder ab.

Aufgabensammlung Seite 65, 66 und 67.

e) Multiplikation der Brüche.

Beispiele:

1) $$\frac{5}{6}\cdot 7=\frac{5\,.\,7}{6}=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$$

2) $$\frac{5}{8}\cdot 4=\frac{5\,.\,4}{8}=\frac{20}{8}=2\frac{4}{8}=2\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{8}\cdot 4=\frac{5}{8:4}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

3) $$\frac{19}{24}\cdot 8=\frac{19}{24:8}=\frac{19}{3}=6\frac{1}{3}$$

4) $$20\cdot\frac{7}{40}=\frac{7}{40:20}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$$

Hieraus folgt:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl oder eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multipliziert, indem man entweder den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert, oder wo es möglich ist, den Nenner durch dieselbe dividiert.

Beispiele:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \,.\, 4}{7 \,.\, 9} = \frac{20}{63}$$

$$\frac{26}{45} \cdot \frac{27}{65} = \frac{2 \,.\, 13}{5 \,.\, 9} \cdot \frac{3 \,.\, 9}{5 \,.\, 13} = \frac{6}{25}$$

oder

$$\frac{26}{45} \cdot \frac{27}{65} = \frac{2 \,.\, 3}{5 \,.\, 5} = \frac{6}{25}$$

Hieraus folgt:

Zwei oder mehrere Brüche werden multipliziert, wenn man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner dividiert.

(Anm. Der Beweis dieses Satzes ist dem Unterrichte vorbehalten.)

Hat der Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des andern einen gemeinschaftlichen Teiler oder Divisor, so kann man durch Division mit demselben die Rechnung vereinfachen.

Beispiel:

$$12 \cdot 5\frac{1}{2} \cdot 3\frac{4}{7} \cdot 5\frac{3}{5}$$

$$= \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{25} \cdot \cancel{28}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{5}}$$

$$= \frac{6 \,.\, 11 \,.\, 5 \,.\, 4}{1} = 1320.$$

Hieraus folgt:

Gemischte Zahlen werden vor der Multiplikation in unechte Brüche verwandelt, ganze Zahlen in Brüche mit dem Nenner 1.

Aufgabensammlung Seite 67 und 68.

f) Division der Brüche.

Beispiel:

$$\frac{12}{13} : 4 = \frac{12 : 4}{13} = \frac{3}{13}$$

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \,.\, 5} = \frac{3}{20}$$

Hieraus folgt:

Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man entweder den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividiert oder den Nenner mit derselben multipliziert. Haben der Zähler und die ganze Zahl einen gemeinschaftlichen Teiler oder Divisor, so dividiert man zuvor mit demselben.

Beispiel:

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3 \,.\, 4}{5 \,.\, 2} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

Hieraus folgt:

Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man das Produkt aus dem Zähler des Dividenden und dem Nenner des Divisors dividiert durch das Produkt aus dem Nenner des Dividenden und dem Zähler des Divisors oder kurz: **Zwei Brüche werden dividiert, indem man mit dem umgestürzten Divisor (dem reciproken Werte) multipliziert.**

Beispiel:

$3 = \frac{3}{1}$; der reciproke Wert von 3 ist also $\frac{1}{3}$.

$$\frac{9}{10} : 3 = \frac{9 : 3}{10} = \frac{3}{10}$$

oder:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{10} : \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{3}{10}$$

Hieraus folgt:

Jede ganze Zahl kann man sich immer als Bruch mit dem Nenner 1 denken.

Beispiel:

$$\frac{12}{49} : \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

Hieraus folgt:

Zwei Brüche können, wo es möglich ist, auch dividiert werden, indem man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividiert.

Beispiel:

$$10\frac{1}{4} : 20\frac{1}{2} = \frac{41}{4} : \frac{41}{2} = \frac{1}{2}$$

Hieraus folgt:

Gemischte Zahlen werden wie bei der Multiplikation zuvor in unechte Brüche verwandelt.

Aufgabensammlung Seite 69 und 70.

g) Multiplikation und Division der Brüche.

Beispiel:

$$9\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$$

$$\frac{75}{8} \cdot \frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$$

$$\frac{75}{16} : \frac{15}{2}$$

$$\frac{\overset{5}{\cancel{75}}}{\underset{8}{\cancel{16}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{15}}} = \frac{5}{8}$$

Hieraus folgt:

Den Wert eines algebraischen Produktes oder einer Serie findet man, wenn man das Produkt aller Faktoren durch das Produkt aller Divisoren dividiert.

Aufgabensammlung Seite 70.

h) Von den zusammengesetzten Brüchen oder den sogenannten Bruchbrüchen.

Beispiele:

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} \qquad \frac{5}{\frac{4}{9}} \qquad \frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{5}} \qquad \frac{5\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}}$$

1) $\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

2) $\frac{5}{\frac{4}{9}} = 5 : \frac{4}{9} = 5 \cdot \frac{9}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$

3) $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$

4) $\frac{5\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{8}{3}} = \frac{11}{2} : \frac{8}{3} = \frac{11}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{33}{16} = 2\frac{1}{16}$

Hieraus folgt:

Unter einem sogenannten Bruchbruch versteht man einen Bruch, in welchem der Zähler oder Nenner oder beide aus Brüchen oder aus einer Verbindung von Brüchen bestehen.

Beispiel:

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} = \frac{3 \,.\, 5}{7 \,.\, 2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{1}} = \frac{3 \,.\, 1}{4 \,.\, 5} = \frac{3}{20}$$

Hieraus folgt:

Wenn der Bruch die Bruchform $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$ hat, so gibt das Produkt der beiden äußeren Zahlen den Zähler, das Produkt der beiden inneren den Nenner.

Beispiel.

$$\left[\left(13\frac{1}{9} + 12\frac{5}{6} : \frac{2}{9}\right) - \left(10\frac{2}{3} \cdot 75 - 799\frac{3}{4}\right)\right] : \frac{1}{18}$$

$$= \left[\left(13\frac{1}{9} + 57\frac{3}{4}\right) - \left(800 - 799\frac{3}{4}\right)\right] : \frac{1}{18}$$

$$= \left[70\frac{31}{36} - \frac{1}{4}\right] : \frac{1}{18}$$

$$= 70\frac{22}{36} : \frac{1}{18}$$

$$= \frac{2542}{36} \cdot \frac{18}{1}$$

$$= 1271.$$

Hieraus erhellt:

Betreffs zusammengesetzter Ausdrücke wird in Bezug auf die Aufeinanderfolge der Operationen und Behandlung der Klammern auf Seite 14, 15 und 16 verwiesen.

Aufgabensammlung Seite 71.

i) Vermischte Aufgaben über die vier Rechnungsarten mit gemeinen Brüchen.

Siehe Aufgabensammlung Seite 71 bis 79 incl.

k) Resolvierung benannter Brüche.

Beispiele:

1) Wie viel deutsche Reichspfennige geben $\frac{3}{5}$ Mark?

$$\frac{3}{5} \cdot 100 = \frac{3 \cdot \overset{20}{\cancel{100}}}{\cancel{5}} = 60 \text{ dl. deutsche Reichsw.}$$

2) Wie viel Centimes geben $\frac{4}{5}$ Francs?

$$\frac{4}{\cancel{5}} \cdot \overset{20}{\cancel{100}} = 4 \;.\; 20 = 80 \text{ Centimes.}$$

3) Wie viele Monate, Tage, Stunden, Minuten und Sekunden sind $\frac{5}{7}$ Jahre?

$$\frac{5}{7} \text{ a} = \frac{5}{7} \;.\; 12 \text{ Monat} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7} \text{ Monate}$$

$$\frac{4}{7} \text{ Monat} = \frac{4}{7} \cdot 30 \text{ d} = \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7} \text{ d}$$

$$\frac{1}{7} \text{ d} = \frac{1}{7} \cdot 24 \text{ h} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7} \text{ h}$$

$$\frac{3}{7} \text{ h} = \frac{3}{7} \cdot 60' = \frac{180}{7} = 25\frac{5}{7}'$$

$$\frac{5}{7}' = \frac{5}{7} \cdot 60'' = \frac{300}{7} = 42\frac{6}{7}''$$

Antwort: $\frac{5}{7}$ Jahre = 8 Monate 17 Tage 3 Stunden 25 Minuten $42\frac{6}{7}$ Sekunden.

Hieraus folgt:

Brüche werden in Einheiten einer niederen Sorte verwandelt, wenn man den Bruch mit der Reduktionszahl multipliziert.

Aufgabensammlung Seite 74 und 75.

1) Reduzierung benannter Brüche.

Beispiele:

1) Wie viele Mark sind 90 dl. deutsche Reichswährung?

$$90 \text{ dl.} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} \text{ Mark.}$$

2) Wie viele Francs sind 60 Centimes?

$$60 \text{ Centimes} = \frac{60}{100} \text{ Francs} = \frac{6}{10} \text{ Francs} = \frac{3}{5} \text{ Francs}$$

3) Wie viele Ballen sind 15 Buch Schreibpapier?

$$15 \text{ Buch} = \frac{15}{200} = \frac{3}{40} \text{ Ballen.}$$

4) Der wie vielte Teil eines Jahres sind 8 Monate 17 Tage 3 Stunden 25 Minuten $42\frac{6}{7}$ Sekunden?

$$42\frac{6}{7}'' = \frac{42\frac{6}{7}}{60}' = \frac{300}{7} : \frac{60}{1} = \frac{\overset{5}{\cancel{300}}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{60}} = \frac{5}{7}'$$

$$25\frac{5}{7}' = \frac{25\frac{5}{7}}{60} \text{ h} = \frac{180}{7} : \frac{60}{1} = \frac{\overset{3}{\cancel{180}}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{60}} = \frac{3}{7} \text{ h}$$

$$3\frac{3}{7} \text{ h} = \frac{3\frac{3}{7}}{24} \text{ d} = \frac{24}{7} : \frac{24}{1} = \frac{\cancel{24}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{24}} = \frac{1}{7} \text{ d}$$

$$17\frac{1}{7} \text{ d} = \frac{17\frac{1}{7}}{30} \text{ Monat} = \frac{120}{7} : \frac{30}{1} = \frac{\cancel{120}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{30}} = \frac{4}{7} \text{ Monat}$$

Hieraus folgt:

Einheiten einer niederen Ordnung werden in einen Bruch einer höheren Ordnung verwandelt, wenn man durch die Reduktionszahl dividiert.

Aufgabensammlung Seite 75.

m) Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

Beispiel:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \,.\, 2}{5 \,.\, 2} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \,.\, 4}{25 \,.\, 4} = \frac{12}{100} = 0,12$$

Hieraus folgt:

Ein gemeiner Bruch wird in einen Decimalbruch verwandelt, indem man ihn so erweitert, d. h. Zähler und Nenner mit einer solchen Zahl multipliziert, daß der Nenner eine Potenz von 10 wird.

Beispiel:

$$\frac{5}{8} = 5,000 : 8 = 0,625.$$

Hieraus folgt:

Man erreicht diesen Zweck immer, wenn man den Zähler des Bruches durch den Nenner dividiert.

Beispiele:

a) $\frac{3}{4} = 0,75$

b) $\frac{2}{3} = 0,666 \ldots$

Hieraus folgt:

Bei der Division können zwei Fälle eintreten:

a) Die Division geht auf und der erhaltene Decimalbruch ist ein **endlicher.** Der **Wert** des Decimalbruches ist **genau gleich dem Werte** des gegebenen Bruches.

Anm. Dieser Fall tritt immer ein, wenn sich der Nenner des gegebenen Bruches in ein Produkt zerlegen läßt, in welchem nur die Faktoren 2 oder 5 oder 2 und 5 vorkommen.

b) Die Division geht nicht auf und der erhaltene Decimalbruch ist ein **unendlicher.** Sein **Wert ist nicht genau gleich dem Werte** des gegebenen Bruches.

Beispiel:

α) $0,476476 \ldots\ldots = 0,\overset{\frown}{476}$

$0,222 \ldots\ldots\ldots = 0,\overset{\frown}{2}$

β) $0,3666 \ldots\ldots\ldots = 0,\underset{\smile}{3}\overset{\frown}{6}$

$0,152726 \ldots\ldots = 0,\underset{\smile}{15}\overset{\frown}{27}$

Hieraus folgt:

Ein Decimalbruch, bei dem sich ein oder mehrere Ziffern regelmäßig wiederholen, heißt ein **periodischer Decimalbruch.**

Man teilt deshalb die Decimalbrüche ein:

α) in **reinperiodische** Decimalbrüche, wenn die Periode gleich hinter dem Komma beginnt,

β) in **unreinperiodische,** wenn nicht unmittelbar nach dem Komma die Periode beginnt, sondern derselben noch Ziffern vorausgehen.

n) Verwandlung der Decimalbrüche in gemeine Brüche.

Beispiel:

$$0{,}15 = \frac{15}{100} = \frac{15:5}{100:5} = \frac{3}{20}$$

Hieraus folgt:

a) Die Verwandlung der endlichen Decimalbrüche in gemeine gibt sich von selbst aus der Entstehung der Decimalbrüche.

Beispiel:

$$0{,}\widehat{45} = \frac{45}{99} = \frac{45:9}{99:9} = \frac{5}{11}.$$

Hieraus folgt:

b) Bei der Verwandlung der reinperiodischen Decimalbrüche in gemeine schreibt man **die Ziffern der Periode als Zähler und als Nenner so viele Neuner, als die Periode Stellen hat.**

Beispiel:

$$\alpha)\quad 0{,}\underline{3}\widehat{6} = \frac{36-2}{90} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$$

$$1{,}\underline{15}27 = 1\frac{1527-15}{9900} = 1\frac{1512}{9900} = 1\frac{42}{275}$$

$$\beta)\quad 1{,}\underline{15}\widehat{27} = 115\frac{27}{99} : 100 = 115\frac{3}{11} : 100$$

$$= \frac{1268}{11} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1268}{1100} = \frac{317}{275} = 1\frac{42}{275}$$

$$\gamma)\quad 1{,}\underline{15}\widehat{27} = 1\frac{15}{100} + \frac{27}{9900}$$

$$= 1\frac{15 \,.\, 99 + 27}{9900} = 1\frac{1485+27}{9900}$$

$$= 1\frac{1512}{9900} = 1\frac{42}{275}$$

Hieraus folgt:

c) Ein unreinperiodischer (gemischtperiodischer) Decimalbruch wird auf folgende Weise in einen gemeinen verwandelt:

α) Man subtrahiere von den **Vorziffern und der Periode die Vorziffern. Die Differenz gibt den Zähler. Als Nenner setze man so viele Nenner, als die Periode Stellen hat und hänge derselben so viele Nullen an, als der Periode Vorziffern vorausgehen;**

β) durch Multiplikation;

γ) durch Addition.

Beispiel:

$$\frac{1,\overset{\frown}{3} + 2\tfrac{5}{6} - 0,\overset{\frown}{16}}{\tfrac{7}{8} - 0,75 + 0,25} = \frac{1\tfrac{1}{3} + 2\tfrac{5}{6} - \tfrac{1}{6}}{0,875 - 0,75 + 0,25}$$

$$= \frac{4}{0,875 - 0,50} = \frac{4}{0,375} = \frac{4}{\tfrac{3}{8}} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Hieraus folgt:

Kommen in einer Rechnung gemeine und Decimalbrüche vor, so werden in der Regel die gemeinen Brüche in Decimalbrüche verwandelt. Kommen mehr gemeine Brüche als Decimalbrüche vor und unter den letzten mehrere unendliche und periodische, so ist es genauer, die Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln.

Zweiter Teil.

---

1. Schlußrechnungen.

Manche glauben, sehr viele Aufgaben lassen sich nur durch die Regel de tri lösen und halten deshalb die Proportion für die Seele der Arithmetik. In den meisten Fällen gelangt man jedoch durch die sogenannte **Schlußrechnung,** welche blos die vier Grundrechnungsarten (species) voraussetzt, viel rascher zum Ziele.

Das Rechnen nach Schlüssen findet statt durch das **Zurückführen auf die Einheit und dann durch das Schließen von der Einheit auf die Mehrheit.** Z. B.

a) Wenn 9 Arbeiter zu einer Arbeit 10 Tage brauchen, wie lange brauchen 5 Arbeiter zu derselben Arbeit?

9 Arbeiter brauchen 10 Tage.

1 Arbeiter braucht 10 Tage · 9 Tage.

5 Arbeiter brauchen $\frac{\overset{2}{\cancel{10}} \cdot 9}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 18$ Tage.

b) Wenn 20 Arbeiter in 6 Tagen bei täglich 10 Stunden Arbeit 60 Thaler verdienen, wie viel werden unter gleichen Umständen 40 Arbeiter verdienen, welche 30 Tage und täglich 12 Stunden arbeiten?

Bedingungssatz:

20 Arbeiter verdienen in 6 Tagen bei 10 Stunden Arbeit 60 Thaler.

Fragesatz:

40 Arbeiter verdienen in 30 Tagen bei 12 Stunden Arbeit x Thaler.

20	Arbeiter	verdienen	in 6	Tagen	bei 10	St.	täglich	60 Thlr.
1	„	verdient	„ 6	„	„ 10	„	„	$\frac{60}{20}$
1	„	„	„ 1	Tag	„ 10	„	„	$\frac{60}{20 \cdot 6}$
1	„	„	„ 1	„	„ 1	„	„	$\frac{60}{20 \cdot 6 \cdot 10}$
40	„	verdienen	„ 1	„	„ 1	„	„	$\frac{60 \cdot 40}{20 \cdot 6 \cdot 10}$
40	„	„	„ 30	Tagen	„ 1	„	„	$\frac{60 \cdot 40 \cdot 30}{20 \cdot 6 \cdot 10}$
40	„	„	„ 30	„	„ 12	„	„	$\frac{60 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 12}{20 \cdot 6 \cdot 10}$

$$\frac{\overset{10}{\cancel{60}} \cdot \overset{2}{\cancel{40}} \cdot 30 \cdot 12}{\underset{1}{\cancel{20}} \cdot \underset{1}{\cancel{6}} \cdot \cancel{10}} = 720 \text{ Thaler.}$$

oder

c) Bedingungssatz:

20 Arbeiter verdienen in 6 Tagen bei 10stündiger Arbeitszeit 60 Thlr.

Fragesatz:

40 „ „ „ 30 „ „ 12 „ „ x „

$$x = \frac{\overset{10}{\cancel{60}} \cdot \overset{2}{\cancel{40}} \cdot 30 \cdot 12}{\underset{1}{\cancel{20}} \cdot \underset{1}{\cancel{6}} \cdot \cancel{10}}$$ = 720 Thaler verdienen 40 Arbeiter in 30 Tagen bei 12stündiger Arbeitszeit.

Aufgabensammlung Seite 76 bis 82 incl.

2. Tauschrechnungen.

Zum Leben oder zum Gebrauche haben wir so viele Dinge nötig, daß der Einzelne unmöglich selbst seinen Bedarf herstellen oder erzeugen kann. Deshalb die Teilung der Arbeit. Ein Teil der arbeitenden Klasse gibt sich damit ab, aus den Rohprodukten Gewinn zu erzielen, wie z. B. der Landmann aus den Feldfrüchten und der Viehzucht, der Bergmann aus der Herausschaffung der Metalle. Der andere Teil verarbeitet die Rohprodukte zum Genusse oder Gebrauche.

Gewöhnlich nun ist es üblich, daß die einzelnen Erzeugnisse gegen **bares Geld** umgetauscht, d. i. **ein**= oder **verkauft** werden.

Das Geschäft des Kaufmanns bringt es aber häufig mit sich, daß Waren gegen Waren umgetauscht werden. In diesem Falle ist nun genaue Berechnung der Quantität und Qualität der Waren notwendig.

Aufgabensammlung Seite 83.

3. Einfache Warenberechnung.

(Kettensatz.)

Beispiel 1.

Wie viele Österr. Gulden sind 100 Rubel, wenn 53,55 ℳ = 6 Dukaten und 3 Rubel = 1 Dukaten sind?

	25
	50
Öst. fl. ?	100 Rubel
3 Rubel	1 Dukaten
1	5,95
	17,85
6 Dukaten	53,55 Mark
3	
1	
2 Mark	1 Öst. fl.
1	
	25 · 5,95

138,75 Öst. fl. sind 100 Rubel.

Beispiel 2.

Wie viele Doppelkronen betragen die von Frankreich bezahlten 5 Milliarden Franken Kriegsentschädigung, wenn 5 Centimes = 4 neue Pfennige gerechnet werden?

Dkr ?	5000000000 frs
	20
1 fr	100 cs
	2
5 cs	4 ₰
2000 ₰	1 Dkr
	2 · 20 · 5000000
	40 · 5000000
	200000000 Doppelkronen Deutsche

Reichswährung betragen die von Frankreich bezahlten 5 Milliarden Kriegsentschädigung.

Der **Kettensatz, auch Kettenregel oder Rees'scher Ansatz** genannt, wird irrtümlich einem holländischen Kaufmann de Rees zugeschrieben. Der Kettensatz findet sich übrigens schon in Lehrbüchern, welche der bekannte Rechenmeister Adam Riese verfaßte. Eine praktische Bedeutung erlangte die Kettenregel erst in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, indem dieselbe in kaufmännischen Rechnungen Anwendung fand. **In Aufgaben, in denen Münzen, Maße und Gewichte des einen Landes in Münzen, Maße und Gewichte des andern Landes umgerechnet werden sollen, also in Aufgaben oder Rechnungen, in denen es sich um fortlaufende Reduktionen gleicher Werte in andere Benennungen handelt, wird der sogenannte Kettensatz mit Vorteil angewendet, weil man dadurch auf die einfachste und bequemste Weise das gewünschte Resultat erhält.** Bei dieser Gelegenheit kann jedoch nicht in Abrede gestellt werden, daß der Kettensatz oder die Kettenregel leicht zu einem gewissen Mechanismus führt und gerade deshalb in Schulen nicht gebraucht werden soll. Nur insoferne ist die Anwendung dieser Rechnungsart zu rechtfertigen, als die gewöhnlichen Auflösungsweisen durch die Schlußrechnung zu Weitläufigkeiten führt. Man hat deshalb aus der weitläufigen Ausrechnungsweise eine kürzere, freilich aber auch eine mechanische und daher an geistbildenden Momenten wenig reiche Methode eine praktische Regel abgeleitet, die wegen der eigentümlichen Anordnung der den Ansatz bildenden Glieder **Kettenregel** genannt wird.

Aufgabensammlung Seite 83—85.

4. Teilungsrechnungen.

Beispiele:

100,80 ℳ sollen unter 3 Personen so verteilt werden, daß A $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{3}$ und C den Rest erhält. Wie viele Mark bekommt jeder?

Auflösung: A erhält $\frac{1}{4}$ von 100,80 ℳ = 25,20 ℳ
B erhält $\frac{1}{3}$ von 100,80 ℳ = 33,60 ℳ
C erhält den Rest d. i. 100,80 ℳ — (25,20 + 33,60) ℳ
= 100,80 ℳ — 58,80 = 42 ℳ

Probe: Wenn die Rechnung richtig ist, muß die Summe der Anteile gleich sein der Teilungssumme, folglich

Anteil des A + Anteil des B + Anteil des C = Teilungssumme
25,20 ℳ + 33,60 ℳ + 42 ℳ = 100,80 ℳ

2. Zu einem Kompagniehandel gaben A 1470 ℳ, B 735 Österr. fl. und C 490 Th: sie erzielten einen Gewinn von 2520 frcs. Wie viel Mark d. R.-W. erhält ein jeder?

Auflösung: A gab 1470 ℳ
B gab 734 fl. Öst. W. = 1470 ℳ
C gab 490 Thl = 1470 ℳ

Da von den 3 Händlern jeder gleich viel gab, so erhält auch jeder den gleichen Anteil am Gewinn, folglich den dritten Teil des erzielten Gewinnes, d. i. 2520 frs : 3 = 840 frs.

A) $\frac{78 \cdot 5}{26}$ = 15 Francs.
B) $\frac{78 \cdot 4}{26}$ = 12 Francs.
C) $\frac{78 \cdot 8}{26}$ = 24 Francs.
D) $\frac{78 \cdot 9}{26}$ = 27 Francs.

Probe: Summa 78 Francs.

Die Verteilungsrechnung, auch Repartitions- oder Gesellschaftsrechnung genannt, hat zur Aufgabe, eine Zahl nach gewissen gegebenen Bestimmungen oder Verhältnissen zu teilen. Die zu teilende Zahl heißt Hauptsumme oder Teilungssumme. Die Zahlen, welche angeben, wie die Teilungssumme geteilt werden soll, heißen Verhältniszahlen (Bestimmungszahlen). Die einzelnen Teile, in welche die Teilungssumme geteilt wird, heißen Anteile. Die Verteilungsrechnung findet hauptsächlich Anwendung im Kompagniehandel, bei Erbschaften, Steuern, Falliments (Ganten), Versicherungen, bei der Bereitung und Zersetzung von Kunstprodukten u. s. w.

Wenn eine Zahl nach gegebenen Verhältnissen in Teile zerlegt werden soll, so erhält man diese dadurch, daß man die zu teilende Zahl durch die Summen der Verhältniszahlen dividiert und den erhaltenen Quotienten mit jeder Verhältniszahl multipliziert.

Aufgabensammlung Seite 86—93.

5. Mischungsrechnungen

(Alligationsrechnungen.)

Bei jedem Gegenstande kann man unterscheiden:

1) **seine Quantität (Menge)**
2) **seine Qualität (Beschaffenheit).**

Die **Quantität** ist entweder eine Raum- oder Gewichtsgröße. Die **Qualität** erhält ihren Ausdruck durch Angabe des Wertes, Preises eines Gegenstandes, durch Angabe des Feingehaltes, des spezifischen Gewichtes 2c. 2c.

Die Verbindung flüssiger Körper nennt man Mischung, die trockener Körper Gemenge; erfordert die Verbindung von Körpern Feuer, wie bei den Metallen, so heißt das Verbundene Legierung.

Die **häufigsten Legierungen** bestehen aus **Gold und Silber** unter sich oder auch **mit Kupfer.** Unter Feingehalt einer Legierung versteht man die Bestandteile an feinem Gold oder feinem Silber d. h. Gold oder Silber ohne jeden fremden Zusatz.

Als Gewichtseinheit zur Bezeichnung des Feingehaltes war in Deutschland die kölnische Mark (1 *mk* = 233,85 g) zu Grunde gelegt. Die Mark Feingold (1 *M* f. ☉) wurde nun eingeteilt in 24 Karat à 12 Grän und man verstand z. B. unter 20 karätigem Gold eine Legierung, die 20 Karat feines Gold und 4 Karat Zusatz, Silber oder Kupfer, enthielt. 24 Karat Gold ist demnach gleich dem Feingold.

Die Mark Feinsilber wurde in 16 Lot à 18 Grän eingeteilt und man verstand analog dem Obigen unter 12 lötigem Silber eine Legierung, die 12 Lot feines Silber (12 Lot f. ☽) und 4 Lot Zusatz enthielt.

Gegenwärtig bezeichnet man den Feingehalt nach Tausendteilchen. Es bedeutet also Gold vom Feingehalte 0,9 eine Legierung, die 900 g f. ☉ und 100 g Zusatz enthält, in gleicher Weise Silber vom Feingehalt 0,875 eine Legierung, die 875 g f. ☽ und 125 g Zasatz enthält.

Sollen Gegenstände (Ingredienzien) von verschiedenen Preisen und in verschiedenen Mengen (Quantitäten) vermischt werden, so

geschieht die Berechnung dieser Gegenstände durch die **sogenannte Alligationsrechnung.**

Beispiele:

1) Man schmilzt 84 Mark Silber vom Feingehalte $15\frac{1}{2}$ und 105 Mark Silber vom Feingehalte 11; welches ist der Feingehalt der Mischung?

84 Mark $15\frac{1}{2}$ löt. Silber enthalten $84 \cdot 15\frac{1}{2} = 1302$ Teile Feingehalt
105 „ 11 „ „ „ $105 \cdot 11 = 1155$ „ „

189 2457

$$\frac{2475}{189} = 13 \text{ lötiges Silber.}$$

2) Ein Weinwirt mischt 30 Liter Wein à 1 Mark R. W. mit 45 Liter à 2 Mark und gießt noch 5 Liter Wasser dazu. Wie hoch kommt der Liter dieser Mischung?

30 Liter à 1 Mark $= 30 \cdot 1 = 30$ Mark.
45 „ à 2 „ $= 45 \cdot 2 = 90$ „
5 „ à 0 „ $= 5 \cdot 0 = 0$ „

80 Liter kosten 120 Mark.

$$1 \text{ Liter} = \frac{120}{80} = 1\frac{40}{80} = 1\frac{1}{2} \text{ Mark.}$$

Regel: Die Summe der Werte der Bestandteile einer Mischung dividiert durch die Anzahl der Bestandteile gibt den Durchschnitts- oder Mittelwert.

3) Jemand hat 2 Sorten Wein, den Liter zu 1 Mark 75 Pf. und zu 1 Mark 10 Pf. Wie viel hat er von jeder Sorte zu nehmen, um 60 Liter zu 1 Mark 15 Pf. zu erhalten?

x Liter à 125 Pf. kosten 125 x Pf.
(60 — x) Liter à 110 Pf. „ (60 — x) · 110 Pf.

Der Betrag der Einnahme, wenn er die beiden Sorten einzeln verkauft, muß gleich sein dem Erlös des gemischten Weines.

$$125\,x + (60 - x) \cdot 110 = 60 \cdot 115$$
$$125\,x + 6600 - 110\,x = 6900$$
$$15\,x = 6900 - 6600 = 300$$
$$x = 20 \text{ Liter.}$$

Er nimmt 20 Liter à 125 Pf. = 25 Mark
und 40 Liter à 110 Pf. = 44 Mark

60 Liter à 115 Pf. = 69 Mark

4) Wie viel Wasser muß man zu einem Weine gießen, von welchem der Liter 60 Pf. kostet, um einen Hektoliter zu erhalten, von welchem der Liter 45 Pf. kostet?

x Liter Wasser kosten 0 Pf.
(100 — x) à 60 Pf. = 60 · (100 — x)

$$60 \cdot (100 - x) = 100 \cdot 45$$
$$6000 - 60\,x = 4500$$
$$6000 - 4500 = 60\,x$$
$$1500 = 60\,x$$
$$x = \frac{1500}{20} = 25 \text{ Liter Wasser.}$$

75 Liter à 60 Pf. = 45 Mark.
25 Liter à 0 Pf. = 0 Mark

100 Liter à 45 Pf. = 45 Mark.

Bei diesen Alligationsrechnungen ist besonders jene Art hervorzuheben, bei welcher das Verhältnis der Teile nicht unmittelbar angegeben ist, sondern erst gesucht werden muß.

Die Regel hiefür ist folgende:

Der Unterschied zwischen dem mittleren Wert und dem geringeren gibt die Verhältniszahl der besseren Sorte, hingegen der Unterschied zwischen dem besseren Wert und dem mittleren gibt die Verhältniszahl der geringeren Gattung.

Aufgabensammlung Seite 93—97.

6. Prozentrechnung.

Wenn es sich darum handelt, eine Zahl aufzustellen, welche als Maßstab für arithmetische Verhältnisse möglichst große Bequemlichkeit in ihrer Benützung mit allgemeinster Anwendbarkeit verbindet, so ist sicher keine mehr dazu geeignet, als die Zahl 100, da alle übrigen Zahlen bequem als Teile oder Produkte derselben

betrachtet werden können, daher die Wichtigkeit dieser Zahl für das kaufmännische Rechnungswesen, in welchem bei weitem die Mehrzahl der Verhältnisse auf die Zahl 100 sich bezieht.

Man sagt z. B.: ich gewinne oder verliere **fünf vom Hundert** oder **fünf pro Cent**, mein Kapital trägt vier pro Cent, (abgekürzt: pr. C., %) und nennt diese **fünf** und **vier** den **Prozentfuß**, **Prozentsatz**, **Zinsfuß** u. s. w.

Dieser Prozentfuß, verbunden mit der Zahl 100, wird nun als Maßstab zur Bestimmung gewisser, im Handel und Wandel oft vorkommender Verhältnisse, als Zins und Rabatt, Gewinn und Verlust, sowie chemischer Bestandteile, Agio, Diskont, Provision, Courtage, Assekuranzprämien, Tara 2c. 2c. benutzt und der Inbegriff sämtlicher hieher gehöriger Rechnungen nennt man die **Prozentrechnung.**

Also unter **Prozentfuß,** beziehungsweise **Promillefuß** (pro mille, d. h. für 1000) versteht man diejenige Zahl, welche angibt, wie viel von der zu grunde gelegten Zahl 100 oder 1000 zu rechnen ist.

Z. B. 5 Prozent oder 5 % heißt so viel als: von je 100 sind 5 zu rechnen.

2 Promille, abgekürzt 2 ‰ heißt: von je 1000 sind 2 zu rechnen.

Den Prozentfuß (Promillefuß) kann man somit als den Zähler eines Bruches betrachten, dessen Nenner 100 (1000) ist.

Der **Wert,** von dem gewisse **Prozente** zu berechnen sind, wird gewöhnlich **Kapital** genannt.

Anm. Eine kurze Erklärung einiger **termini technici** dürfte hier am Platze sein.

a) **Gewinn** heißt der Überschuß des Erlöses über die aufgewendeten Kosten.

b) Unter **Spesen** versteht man einen Aufwand, eine Auslage (Kosten).

Wird die Auslage nicht durch die Einnahme oder den Erlös gedeckt, so entsteht ein **Verlust oder Deficit.**

Bei Berechnungen des Gewinnes oder Verlustes ist stets die Summe aller Auslagen zu grunde zu legen.

Geschäfte, die einen namhaften Überschuß über die Auslage gewähren, **rentieren** sich.

c) **Dividende** nennt man den bei einem Geschäfte, an welchem sich mehrere beteiligen, erzielten Gewinn, der in der Regel nach der Vermögenseinlage verteilt wird.

d) **Tantième** heißt der vertragsmäßig festgesetzte Anteil am Geschäftsgewinn oder auch am gesamten Geschäftsbetrage.

e) In Procenten werden häufig gewisse Vergütungen berechnet, z. B.

α) **Provision** ist die Vergütung, welche der Kommissionär (Auftragnehmer) vom Kommittenten (Auftraggeber) für die Ausführung des Auftrages (Kommission) erhält.

β) **Courtage** (Mäcklergebühr) ist die dem Mäckler für besorgte Vermittlungsgeschäfte gewährte Vergütung.

γ) **Assekuranz- oder Versicherungsprämie** ist die Vergütung, die der Versicherte (Assekurierte oder Assekurat) an den Versicherer (Assekurator oder Assekurant zu entrichten hat. Die den Versicherungsbetrag bezeugende Urkunde heißt **Versicherungsschein (Police).**

δ) **Delcredere** ist die Gewährleistung des Kommissionärs für die von ihm auf fremde Rechnung verkauften Waren.

ε) Die Versendung der meisten Waren geschieht bekanntlich in Kisten, Säcken, Körben oder sonst einer Verpackung **(Emballage).**

Das Gewicht der Ware mit Einschluß der Packhülle nennt man **Brutto (Bruttogewicht).**

Das Gewicht der Ware allein heißt **Netto (Nettogewicht).**

Das Gewicht der Verpackung (Emballage) heißt **Tara (Taragewicht).** Die **Tara** wird entweder nach **Prozenten** oder nach **Stücken** bestimmt.

Im Großhandel bewilligt der Verkäufer dem Käufer einen Gewichtsabzug vom **Netto, Gutgewicht** genannt, da beim Verkauf in kleinen Partien immer etwas eingewogen wird. Bei manchen Waren wird ein **Gewichtsabzug, Refactie** genannt, gestattet, um den Käufer für die unverkäuflichen Teile oder Abfälle derselben zu entschädigen, d. h. eine Vergütung für beschädigte Waren zu geben, z. B. bei Häuten, Fellen und anderen Artikeln, die durch Nässe oder Verschimmelung leiden.

Fusti ist eine Vergütung für das Unreine in der Ware, z. B. für Stiele, Steine, Blätter und Staub rc. rc.

Leccage ist eine Vergütung bei Flüssigkeiten für das, was etwa durch Auslaufen von den Fässern verloren gegangen ist.

Der Kürze wegen bezeichnen wir das **Kapital** mit **c**, den **Prozentfuß** mit **p** und den **Prozentbetrag** mit **u**.

Anm. **p** kann auch den **Promillefuß** bedeuten.

$$u = \frac{c}{100} \cdot p$$

a) Anwendung der Prozente bei Berechnung von Provision, Courtage etc.

Beispiele.

1) Wie viel beträgt die Provision von 6600 Francs zu 3%?

$$u = \frac{6600 \ . \ 3}{100} = 198 \text{ Francs.}$$

2) Wie viel beträgt die Assekuranzgebühr von 12000 ℳ zu 2‰?

$$u = \frac{1200 \cdot 2}{1000} = 24 \text{ ℳ}$$

3) Man verkauft eine Ware mit 5 % Gewinn um $7\frac{1}{2}$ Francs. a) Wie teuer mußte sie gegeben werden, wenn dabei 8 % gewonnen werden sollten? b) Wie hoch kommt sie im Ankauf?

a) Bedingungssatz: 105 Frs. mit Gew. von 100 Frs. $7\frac{1}{2}$ Frs. Verk.
Fragesatz: 108 „ „ „ „ 100 „ x „ „

$$x = \frac{108 \cdot 7^1/_2}{105} = \frac{108 \cdot 15}{105 \cdot 2} = 7\tfrac{5}{7} \text{ Francs.}$$

Hieraus folgt:

Man findet den Prozentbetrag, wenn man den hundertsten Teil des Kapitals mit dem Prozentfuß multipliziert.

b) $$x = \frac{100 \cdot 15}{108 \cdot 3} = \frac{50 \cdot 5}{36} = \frac{125}{18} = 6\tfrac{17}{18} \text{ Francs.}$$

Hieraus folgt: $p = \frac{100 \cdot u}{c}$

d. h. **man findet den Prozentfuß wenn man den hundertfachen Prozentbetrag durch das Kapital dividiert.** Z. B.

1) Eine Konkursmasse bezahlt statt 12 820 ℳ d. R. W. nur 2564 ℳ. Wie viel % verlieren die Gläubiger?

$$12\,820 - 2564 = 10\,256.$$

$$p = \frac{100 \cdot 10256}{12820} = 80 \text{ \% verlieren die Gläubiger.}$$

2) Von einer Ware, die beim Empfang 5564 Zollpfd. wog, sind 120 Zollpfd. eingetrocknet. Wie viel %?

$$p = \frac{100 \cdot 120}{6546} = \frac{2000}{1091} = 1{,}83 \text{ \%.}$$

3) Der Einkauf beträgt 7852 Frs., der Gewinn 863 frs 72 cs Wie viel %?

$$p = \frac{100 \cdot 863{,}72}{7852} = \frac{86372}{7852} = 11 \text{ \%.}$$

4) Wenn einer Versicherungssumme von 4000 Mark eine Prämie von 5 Mark entspricht, wie viel Promille sind gerechnet?

$$p = \frac{5 \cdot 1000}{4000} = \frac{5}{4} = 1\tfrac{1}{4} \text{ ‰.}$$

Hieraus folgt: $c = \frac{100 \, . \, u}{p}$

d. h. **das Kapital wird gefunden, indem man den hundertfachen Prozentbetrag durch den Prozentfuß dividiert.**

Z. B. Der Gewinn zu $8\frac{1}{2}$ % beträgt 64 fl 9 nkr; wie groß ist der Einkauf?

$$c = \frac{100 \cdot 64{,}09}{8\frac{1}{2}} = \frac{100 \cdot 64{,}09 \cdot 2}{17} = \frac{12818}{17} = 754 \text{ fl Ö. W.}$$

Einkauf.

Anm. 1. Nach % oder ‰ werden berechnet:

a) **Zins;**

b) **Rabatt;**

c) **Versicherungsprämien;**

d) **Tara;**

e) **Steigung einer Eisenbahn, einer Straße, das Gefälle eines Flusses;**

f) die **Zu- und Abnahme einer Bevölkerung;**

g) der **Einfuhrzoll ausländischer Produkte ꝛc.**

Anm. Alle diese Aufgaben können auch in das Kapitel der **Schlußrechnungen** oder in das der **Proportionen** gerechnet werden.

Z. B. Ein Obsthändler erhält für 1 ℳ 60 Äpfel; wie viel Stück darf er im Detailverkauf für 1 ℳ geben, um 20 % zu gewinnen?

Auflösung 1. Was der Obsthändler mit einer Mark bezahlt, dafür verlangt er im Verkauf 1 ℳ 20 ₰ ($\frac{6}{5}$ ℳ).

Also für $\frac{6}{5}$ ℳ gibt er 60 Stücke.

" $\frac{1}{5}$ " " " $\frac{60}{6}$ " = 10 Stücke.

" 1 " " " 5 . 10 Stück = 50 Stücke.

Auflösung 2. $1 : 1{,}2 = x : 60$

$x = 60 : 1{,}2$

$= 600 : 12 = 50$ Stücke.

Aufgabensammlung 98—105.

b) Anwendung der Prozentrechnungen auf Gewinn und Verlust.

Wenn man **gekaufte** Gegenstände wieder **verkauft**, so beträgt der **Erlös** aus denselben entweder **ebensoviel**, oder **mehr oder weniger** als der **Einkaufspreis**. Den **Mehrerlös** nennt man **Gewinn**, den **Mindererlös Verlust**. Gewinn und Verlust sind also

die Differenz oder der Unterschied zwischen **Einkauf** und **Verkauf** und gewöhnlich wird der Gewinn oder Verlust nach Prozenten gerechnet.

Demnach unterscheiden wir bei der Gewinn- und Verlustrechnung zunächst dreierlei Werte:

1) Den Einkaufspreis,
2) Den Verkaufspreis,
3) den Unterschied zwischen beiden — Gewinn oder Verlust.

Aufgabensammlung Seite 105 und 106.

c) Anwendung der Prozentrechnungen auf die Berechnungen von Rabatt.

Beispiele:

1) Wie viel beträgt der 4% Rabatt von 1205 Mark?

$$x = \frac{1205 \cdot 4}{100} = \frac{4820}{100} = 48{,}2 \text{ Mark.}$$

2) Wenn man von einer gewissen Summe 4% Rabatt abzieht, bleiben noch 1156 fl. 80 nkr Ö. W. übrig; wie groß war jene Summe?

Bedingungssatz: 96 fl. werden ohne Abzug 100 fl. Öst.
Fragesatz: 1156,8 fl. werden x fl. Öst.

$$x = \frac{1156{,}8 \cdot 100}{96} = 1205 \text{ fl. Öst. W.}$$

3) Wie viel Prozent Rabatt rechnet man, wenn 1156,8 fl. Ö. W. statt 1205 fl. Ö. W. bezahlt wurden?

bei 1204 fl. Öst. beträgt der Rabatt 48,2 fl. öst.
bei 100 fl. „ „ „ „ x

$$x = \frac{48{,}2 \cdot 100}{1205} = 4\%.$$

Hieraus folgt:

Unter Rabatt versteht man im allgemeinen den Abzug, welchen der Verkäufer dem Käufer gewährt. Er wird meistens in Prozent ausgedrückt.

Aufgabensammlung 106, 107.

7. Zinsrechnungen.

1. Berechnung einfacher Zinsen.

Eine Summe Geldes, welche man irgendwie verwendet, um damit einen Gewinn zu erhalten, heißt **Kapital.**

Wenn jemand einem anderen Geld, Wohnungsräumlichkeiten oder Grundstücke zur Benützung überläßt, so wird er für die Benützung seines Eigentums eine gewisse Entschädigung beanspruchen, welche man im allgemeinen **Zinsen oder Interessen** nennt. Man spricht daher vom **Kapital-, Miet-** und **Pachtzins.**

Derjenige, welcher das **Geld** (Kapital) **ausleiht**, heißt **Gläubiger** oder **Kreditor**, **derjenige**, der **es zu leihen nimmt**, heißt **Schuldner** oder **Debitor**.

Die Zahl, welche angibt, wie viel der Schuldner dem Gläubiger **für oder von hundert Kapital** als **Vergütung** zu zahlen hat, heißt **Prozentzahl oder Zinsfuß.** Der Zinsfuß ist sehr verschieden. Sichere vom Staate garantierte Institute gewähren einen niedereren Zinsfuß als Privatunternehmer. Es zahlt z. B. die Bank für die bei ihr deponierten Gelder nur 2 bis $2\frac{1}{2}$ %, Sparkassen in der Regel 3 bis 4%, der Staat für seine Papiere $3\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ %.

Ist jewand gezwungen, Geld aufzunehmen, so muß er 4, 5, auch 6% zahlen, ein höherer Zinsfuß kommt nur in seltenen Fällen vor. Zur größeren Sicherheit seines Geldes läßt sich in der Regel der Gläubiger das Anwesen oder ein Grundstück des Schuldners gerichtlich als Unterpfand verschreiben. **Ein solcher Schuldschein** heißt **Hypothek** und erhält dadurch der betreffende Gläubiger den Vorrang oder das Vorrecht vor den sogenannten **Kurrentgläubigern** auf Befriedigung seiner Ansprüche.

Man pflegt in der Zinsrechnung, wenn es nicht ausdrücklich anders gefordert wird, in den meisten Staaten das Jahr zu 12 Monaten, den Monat zu 30 Tagen und das Jahr zu 360 Tagen anzunehmen. Nur in England, den englischen Kolonien und in Amerika wird im kaufmännischen Verkehr der Zinsfuß auf 365 Tage berechnet und bringt man deshalb bei jedem Monat die Anzahl der Tage in Berechnung, die der betreffende Monat wirklich hat.

Die Zinsrechnung ermittelt:

1) **Die Zinsen,**
2) **den Zinsfuß,**
3) **das Kapital,**
4) **die Zeit der Verzinsung.**

a) Die Zinsen werden gesucht.

Wie viel Zinsen trägt ein Kapital von 4240 *M* in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu $4\frac{1}{2}$ %.

100 *M* Kapital tragen in 1 Jahre $4\frac{1}{2}$ *M* Zinsen

1 *M* Kapital trägt in 1 Jahre $\frac{4\frac{1}{2}}{100}$ *M* Zinsen

4240 *M* Kapital tragen in 1 Jahre $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 4240}{100}$ *M* Zinsen

4240 *M* Kapital tragen in $2\frac{1}{2}$ Jahren $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 4240 \cdot 2\frac{1}{2}}{100}$ *M* Zinsen

$$\frac{4\frac{1}{2} \cdot 4240 \cdot 2\frac{1}{2}}{100} = \frac{9 \cdot \overset{\overset{53}{\cancel{100}}}{\cancel{\overset{212}{4240}}} \cdot \cancel{5}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{\underset{1}{\cancel{20}}}{\cancel{100}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 477 \text{ M Zinsen.}$$

b) Der Zinsfuß wird gesucht.

Zu wie viel % oder zu welchem Zinsfuß ist ein Kapital von 4240 frs ausgeliehen, wenn dasselbe in $2\frac{1}{2}$ Jahren 477 frs Zinsen tragen soll?

4240 frs Kapital tragen in $2\frac{1}{2}$ Jahren 477 frs Zinsen

4240 „ „ „ „ 1 Jahr $\frac{477}{2\frac{1}{2}}$ „ „

1 „ „ trägt „ 1 „ $\frac{477}{2\frac{1}{2} \cdot 4240}$ „ „

100 „ „ tragen „ 1 „ $\frac{477 \cdot 100}{2\frac{1}{2} \cdot 4240}$ „ „

$$\frac{477 \cdot 100}{2\frac{1}{2} \cdot 4240} = 4\tfrac{1}{2}\ \%.$$

c) Das Kapital wird gesucht.

Welches Kapital trägt in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu $4\frac{1}{2}$ % 477 fl Ö. W. Zins?

$4\frac{1}{2}$ fl. ö. W. Zinsen tragen in 1 Jahr 100 fl. Ö. W. Kapital

1 " " " " trägt " 1 " $\frac{100}{4\frac{1}{2}}$ " " " "

477 " " " " tragen " 1 " $\frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2}}$ " " " "

477 " " " " " " $2\frac{1}{2}$ " $\frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}}$ " " " "

$$\frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}} = \frac{\overset{20}{\cancel{100}} \cdot \overset{53}{\cancel{477}} \cdot 2 \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{9}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = 4240 \text{ fl. Ö. W. Kapital.}$$

d) Die Zeit wird gesucht.

Wie lange muß ein Kapital von 4240 ℳ ausgeliehen sein, um zu $4\frac{1}{2}$ % 477 ℳ Zinsen zu tragen?

100 ℳ Kapital tragen $4\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen in 1 Jahr

1 " " trägt $4\frac{1}{2}$ " " " $1 \cdot 100$ "

4240 " " tragen $4\frac{1}{2}$ " " " $\frac{1 \cdot 100}{4240}$ "

4240 " " " 1 " " " $\frac{1 \cdot 100}{4240 \cdot 4\frac{1}{2}}$ "

4240 " " " 477 " " " $\frac{1 \cdot 100 \cdot 477}{4240 \cdot 4\frac{1}{2}}$ "

$$\frac{100 \cdot 477}{4240 \cdot 4\frac{1}{2}} = \frac{\overset{5}{\cancel{100}} \cdot \overset{\overset{1}{\cancel{53}}}{\cancel{477}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{\underset{\underset{2}{\cancel{100}}}{\cancel{2120}}}{\cancel{4240}} \cdot \underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

Bei den Aufgaben der Zinsrechnung kann auch der Fall vorkommen, daß **Kapital und Zins in einer Summe vereinigt** angegeben sind.

Z. B. Ein gewisses Kapital wurde zu 4 % ausgeliehen, nach $2\frac{1}{2}$ Jahren erhielt man an Kapital und Zinsen zusammen die Summe

von 616 M. Wie groß ist das Kapital und welchen Zins trug dasselbe?

Bedingungssatz: 110 M in $2\frac{1}{2}$ Jahren angewachsen von 100 M
Fragesatz: 616 „ „ $2\frac{1}{2}$ „ „ „ x „

$$x = \frac{616 \cdot 100}{110} = 560 \text{ M Kapital.}$$

Zinsen = 616 — 560 = 56 M Zinsen.

2. Berechnung zusammengesetzter Zinsen.

1. Zinseszinsenrechnung.

Wenn die Zinsen eines Kapitals zum Kapital geschlagen und nun gleich diesem wieder verzinst werden, erhält man **zusammengesetzte Zinsen oder Zinseszinsen.**

Z. B. Wie hoch werden 5000 frs Kapital in 4 Jahren bei ganzjährigen Zinseszinsen à 5 % anwachsen und wie viel betragen die dabei entstandenen Zinseszinsen?

1. Jahr. $\frac{5000 \cdot 5}{100} = 250$ frs Zinsen.

2. Jahr. $\frac{5250 \cdot 5}{100} = \frac{2625}{10} = 262{,}5$ frs Zinsen.

3. Jahr. $\frac{5512{,}5 \cdot 5}{100} = 275{,}625$ frs Zinsen.

4. Jahr. $\frac{5788{,}125 \cdot 5}{100} = 289{,}40625$ frs Zinsen.

a) Das Kapital wächst an auf
5788,125 frs.

b) Die dabei entstandenen Zinseszinsen betragen
250 + 262,5 + 275,625 + 289,40625 = 1077,53125 frs
um 1077,53125 — 4 · 250
= 77 Francs 53,125 Centimes mehr als die einfachen Zinsen.

2. Berechnung des mittleren Zinsfußes mehrerer Kapitalien.

1) Welches ist der mittlere Zinsfuß von vier gleichen Kapitalien, die zu $4\frac{1}{2}$, 4, $3\frac{1}{2}$ und 3 % ausgeliehen sind?

$$\text{Mittlerer Zinsfuß} = \frac{4\frac{1}{2} + 4 + 3\frac{1}{2} + 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\tfrac{3}{4}\ \%.$$

2) 2000 ℳ sind ausgeliehen zu 3 %, 4000 ℳ zu 4 % und 1500 ℳ zu 6 %. Welches ist der mittlere Zinsfuß?

$$\begin{aligned} 2000 \cdot 3 &= 6000 \\ 4000 \cdot 4 &= 16000 \\ 1500 \cdot 6 &= 9000 \\ \hline 7500 \quad &= 31000 \end{aligned}$$

$$\frac{31000}{7500} = \frac{62}{15} = 4\tfrac{2}{15}\ \%\ \text{mittlerer Zinsfuß.}$$

3) Von drei gleichen Kapitalien ist a) auf 6 Monat zu 4 %, b) auf 5 Monat zu 3 % und c) $\frac{1}{4}$ Jahr zu 5 % ausgeliehen, welches ist der mittlere Zinsfuß dieser Kapitalien?

$$\begin{aligned} 6 \cdot 4 &= 24 \\ 5 \cdot 3 &= 15 \\ 3 \cdot 5 &= 15 \\ \hline 14 \quad &= 54 \end{aligned}$$

$$\frac{54}{14} = 3\tfrac{6}{7}\ \%\ \text{mittlerer Zinsfuß.}$$

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 110 und 113.

8. Diskontrechnungen.

Welches ist der bare Wert einer nach $3\frac{1}{2}$ Jahren fälligen Forderung von $1028\frac{1}{2}$ fl. Öst. W. bei 6 % Diskonto und wie groß ist der Diskonto selbst?

1. Strenger Diskonto (auf 100).

Bedingungssatz: 121 fl. Ö. W. Kap. nach 3½ Jahren zahlbar 100 fl. Ö. W.
Fragesatz: 1028½ „ „ „ „ „ 3½ „ „ x „ „ „

$$x = \frac{2057 \cdot 100}{2 \cdot 121} = 850 \text{ fl. Öst. W.}$$

Die Barzahlung beträgt 850 fl. Öst. W. der Diskonto $1028\frac{1}{2} - 850 = 178\frac{1}{2}$ fl. Öst. W. Dies ist der Zins von 850 fl. Öst. W. zu 6 % in $3\frac{1}{2}$ Jahren.

Der Diskont auf hundert ist also immer der Zins der Barforderung und bei Berechnung desselben wird weder Gläubiger noch Schuldner in Nachteil kommen.

2. Einfacher Diskonto (vom 100).

Statt 100 fl. Ö. W. Kap. in $3\frac{1}{2}$ Jahren 79 fl. Öst. W. Barzahlung
„ $1028\frac{1}{2}$ „ „ „ „ „ $3\frac{1}{2}$ „ x „ „ „ „

$$x = \frac{2057 \cdot 79}{2 \cdot 100} = 812 \text{ fl. Öst. W. ist die Barforderung}$$

$$1028\tfrac{1}{2} - 812\frac{103}{200} = 215\frac{197}{205} \text{ ist der Diskonto.}$$

Diese Summe ist der Zins von $1028\frac{1}{2}$ fl. Ö. W. in $3\frac{1}{2}$ Jahren zu 6 %.

Der einfache Diskont oder der Diskont vom Hundert ist also immer der Zins der Schuldforderung.

Hieraus folgt:

Unter Diskont versteht man einen Abzug, der dann stattfindet, wenn ein Kapital vor seiner Verfallzeit zurückbezahlt wird. Besonders kommt der Diskont vor, wenn Wechsel vor ihrer Verfallzeit bezahlt werden.

Man unterscheidet den Diskont **auf** hundert oder den strengen und den Diskont **vom** hundert oder den gewöhnlichen Diskont.

9. Terminrechnungen.

Ein Kaufmann hat in 4 Terminen nachstehende Zahlungen zu leisten:

300 Francs nach 4 Monaten,
400 Francs nach 8 Monaten,
500 Francs nach 1 Jahr und
700 Francs nach 2 Jahren und 10 Monaten.

Wann kann die ganze Summe von 1900 frs auf einmal bezahlt werden, wenn 5 % Zinsen berechnet werden?

Auflösung.

Die Summe der Zinsen, welche sich der Schuldner bis zur Abtragung der ganzen Schuld aus den einzelnen Posten verschaffen kann, muß gleich sein dem Zins aus der Gesamtsumme in der gesuchten Zeit x bei gleichem Zinsfuß, daher

300 Frs.	in 4 Monaten	zahlb. geg. denselb. Zins wie	1200 frs	in 1 Mt.
400 „	„ 8 „	„ „ „ „ „	3200 „	„ 1 „
500 „	„ 12 „	„ „ „ „ „	6000 „	„ 1 „
700 „	„ 34 „	„ „ „ „ „	23800 „	„ 1 „
			34200 frs	in 1 Mt.

Aus den einzelnen Posten erhält man also gerade so viel Zins, wie aus 34 200 frs in 1 Monat oder aus 1 fr in 34 200 Monat oder endlich aus

$$1900 \text{ frs in } \frac{34200}{1900} = 18 \text{ Monat.}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß es nicht auf die Höhe des Zinsfußes ankommt, und daß die Aufgabe auf folgende einfache Art gelöst wird.

$$\begin{aligned} 300 \cdot 4 &= 1200 \\ 400 \cdot 8 &= 3200 \\ 500 \cdot 12 &= 6000 \\ 700 \cdot 34 &= 23800 \\ \hline 1900 \quad : \quad 34200 &= 1 : x \end{aligned}$$

$$x = \frac{34200 \cdot 1}{1900} = 18 \text{ Monat.}$$

Hieraus folgt:

Die Terminrechnung hat die Aufgabe, für mehrere nach verschiedenen Zeiten zahlbare oder fällige unverzinsliche Kapitalien eine mittlere gemeinsame Verfallzeit (einen mittleren gemeinsamen Zahlungstermin) aufzusuchen, zu welcher die ganze Summe dieser Kapitalien auf einmal entrichtet werden kann, ohne daß weder Gläubiger noch Schuldner verkürzt werden.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 115—119.

10. Berechnung von Staatspapieren und Aktien.

Die Staatspapiere sind Schuldurkunden, welche der **Staat** seinen **Gläubigern** über ein **empfangenes Darlehen** ausstellt. Dieselben heißen auch **Staatsschuldverschreibungen oder Staatsobli-**

gationen (Staatseffekten, Staatsfonds). Die **Staatsanleihen** werden in den Fällen gemacht, wo außergewöhnliche Staatsbedürfnisse z. B. in Kriegsfällen, bei großartigen Reformen oder Bauten u. s. w. eintreten, zu deren Befriedigung die gewöhnlichen Staatseinkünfte nicht ausreichen. **Die Verzinsung der Staatspapiere** geschieht meistens nach einem feststehenden Zinsfuße zu bestimmten Zeiten (**halb- oder ganzjährig**). Die Papiere selbst sind verkäuflich und gehen durch den Börsenhandel von einer Hand in die andere. Wenn dieselben auf den Namen des Gläubigers lauten, so müssen sie bei einem etwaigen Verkaufe im Staatshauptbuche auf den neuen Gläubiger förmlich übertragen werden und nur derjenige, auf dessen Namen das Papier lautet, ist zur Empfangnahme der Zinsen berechtigt. In den meisten Fällen aber sind die Staatspapiere auf den Inhaber (au porteur) ausgestellt und können wie jede andere Ware ohne weiteres verkauft werden. Mit diesen verzinslichen Wertpapieren sind **Zinsscheine oder Coupons** verbunden, welche den Inhaber zur Erhebung der jeweils verfallenden Zinsen berechtigen. Ferners ist dem Couponbogen eine Anweisung auf allenfalls erforderlich werdende Zinsscheine angefügt, welche man **Talon** nennt. Die Art und Weise, wie die Staatsanleihen zu Stande kommen und getilgt werden, sowie die Verbindlichkeiten, welche aus denselben für den Staat gegenüber den Gläubigern hervorgehen, sind sehr verschieden. In der Regel sind die Staatsanleihen von Seiten des Gläubigers **nicht kündbar**, wohl aber steht dem Staate das Recht zu, in **vorausbestimmten Fristen** die geliehenen Summen zu **kündigen** und **zurückzuzahlen.** Die **Tilgung (Amortisation)** der Staatsanleihen geschieht nach einem festen Plane aus der für diesen Zweck besonders eingerichteten und auf verschiedene Weise dotierten Amortisationskasse.

Unverzinsliche Fonds sind solche Anleihen, welche durch Verlosungen, die gewöhnlich in jährlichen Terminen stattfinden, zurückbezahlt werden; man heißt diese Staatspapiere daher auch **Lose oder Prämienscheine**, weil bei dieser die Zinsen durch Prämien oder Gewinnste ersetzt werden.

Wie der Staat Anleihen macht, so können auch mit Erlaubnis desselben von **einzelnen Kreisen, Städten, Gemeinden, größeren Korporationen, von fürstlichen Häusern** (standesherrliche Anleihen)

u. s. w. Anleihen abgeschlossen werden, deren Schuldscheine dann ebenso wie Staatspapiere Gegenstand der Kapitalanlage und des Handels zu sein pflegen.

In unserer Zeit kommt es nicht selten vor, daß sich Gesellschaften zu industriellen Zwecken, z. B. zur Anlage einer Eisenbahn oder zur Errichtung und zum Betriebe einer Brauerei, einer Fabrik rc. bilden und die Teilnehmer ohne weitere persönliche Haftung bestimmte Kapitalseinlagen leisten.

Das auf solche Weise gebildete Gesellschaftsvermögen wird in unteilbare **Anteile (Aktien oder Aktienteile)** zerlegt, welche dem **Teilnehmer oder Aktionär** einen verhältnismäßigen Anteil an dem Gesellschaftsvermögen gewähren. Eine solche Gesellschaft nennt man **Aktien-Gesellschaft.**

Schuldverschreibungen über Darlehen, welche Kreditanstalten zum Zwecke des Betriebes des Hypothekgeschäftes, das ist zum Zwecke der Gewährung von Darlehen an Grundbesitzer gegen Liegenschaftsverpfändung aufnehmen, nennt man **Pfandbriefe.**

Der Wert, auf welchen derartige Wertpapiere lauten, wird **Nominal- oder Nennwert** genannt. Die Wertpapiere bilden einen Gegenstand des Handels, und jene Personen, die sich mit ihrem Umsatze, das ist mit dem An- und Verkauf derselben befassen, heißen **Wechsler oder Banquiers.** Der im Handel sich feststellende Wert dagegen heißt **Cours (Kurs).** Eine Seltenheit ist es, daß der Courswert (effektiver Wert von Wertpapieren) mit ihrem Nominalwert übereinstimmt. Besteht **Übereinstimmung zwischen Nominal- und Courswert,** gilt also ein Wertpapier zu nominell hundert auch nach dem Course gerade hundert, so heißt es, das Papier steht **al pari.**

Steht der Cours **über oder unter dem Nominalwert,** so sagt man: das Papier steht **über oder unter pari.**

Der Cours oder Verkaufswert der Wertpapiere wird fast täglich durch die größeren Zeitungen veröffentlicht und der Cours durch die Summe bezeichnet, welche für je 100 *M* Nominalwert bezahlt wird.

Daß die Verzinsung eines Wertpapieres von dessen Courswert gänzlich unabhängig ist und sich nur nach dem Nominalwerte bestimmt, dagegen aber je nach der Höhe oder Niedrigkeit des Zinsfußes vom bedeutendsten Einfluße auf die Gestaltung des Courses ist, ist selbstverständlich.

Beispiel.

Zu welchem Cours muß man $3\frac{1}{2}$ % Obligationen kaufen, wenn das hiezu verwendete Geld $4\frac{1}{2}$ % abwerfen soll?

$4\frac{1}{2}$ ℳ Zins tragen 100 ℳ Kapital

1 „ „ „ $\frac{100}{4\frac{1}{2}}$ „ „

$3\frac{1}{2}$ „ „ „ $\frac{100 \,.\, 3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}$ „ „

$$\frac{100 \,.\, 3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = \frac{100 \,.\, 7 \,.\, \not{2}}{9 \,.\, \not{2}} = 77\tfrac{7}{9} \text{ ℳ}$$

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 119 und 120.

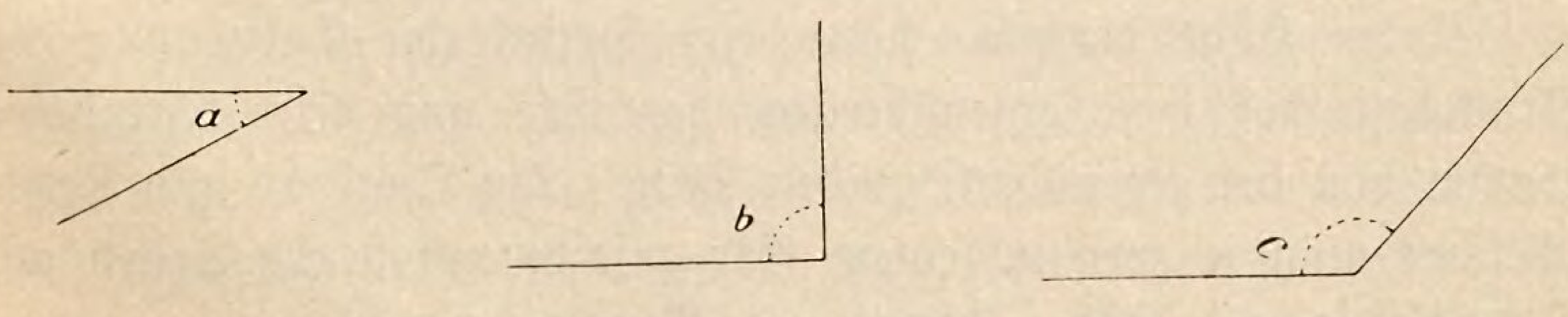
11. Flächen- u. Körperberechnungen.

a) Flächenberechnung.

Die **Gerade** besteht aus einer Reihe von Punkten, die in derselben Richtung aufeinanderfolgen. Eine Reihe aufeinanderfolgende Punkte heißt auch **Linie.** Man unterscheidet **gerade, krumme, gebrochene** und **gemischte Linien.** Die Linie (Gerade) ist die Grenze der Fläche. **Die Fläche hat zwei Ausdehnungen nämlich Länge und Breite (Höhe).** Wir unterscheiden **geradlinig und krummlinig begrenzte Flächen,** je nachdem die Grenzen gerade oder krumme Linien sind.

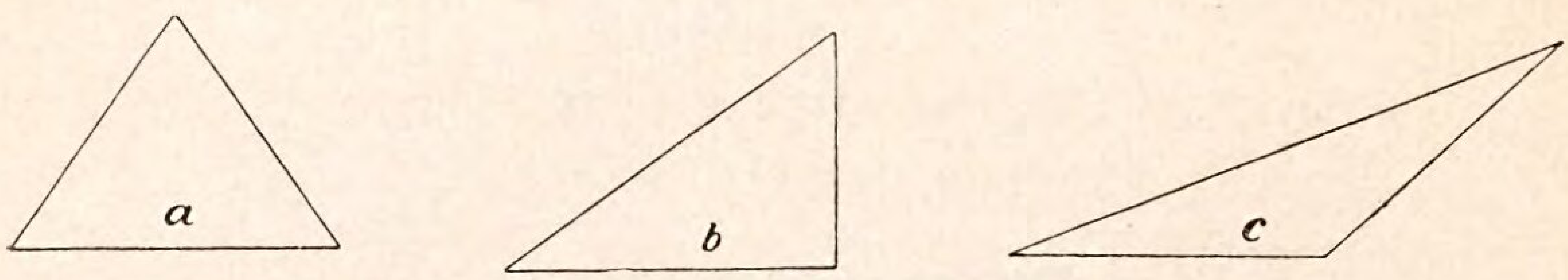
Von den **geradlinig begrenzten Flächen** betrachten wir das **Dreieck,** das **Viereck** &c.; von den **krummlinig begrenzten** den **Kreis.**

Je nachdem eine Fläche von **drei, vier oder fünf** &c. Linien begrenzt ist, nennen wir sie **Dreieck, Viereck, Fünfeck** u. s. w. **Der Abstand zweier sich schneidender Linien heißt Winkel.** Man unterscheidet a) **spitze,** b) **rechte** und c) **stumpfe Winkel.**

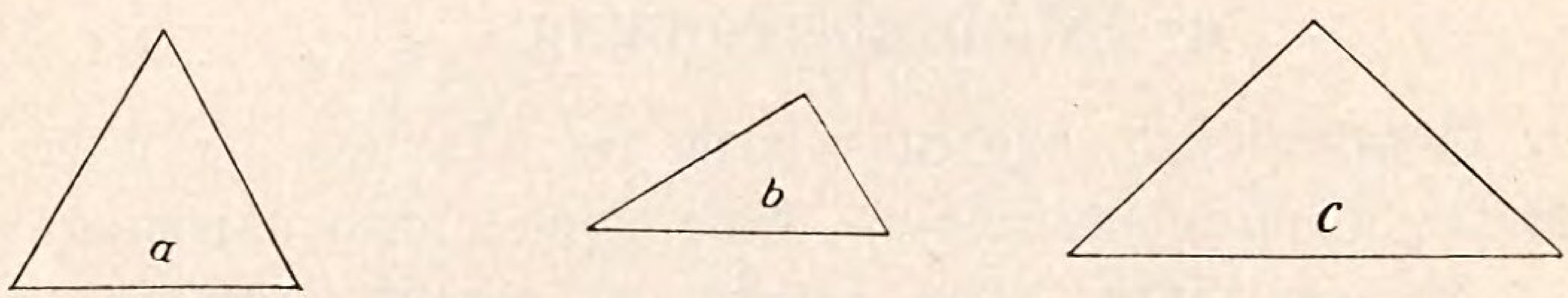


Spitz nennt man einen Winkel der kleiner ist als 90° (Grad), ein **rechter Winkel** enthält 90° und wird gebildet von 2 Linien die aufeinander senkrecht stehen; ein **stumpfer Winkel** endlich ist derjenige, der mehr als 90° hat.

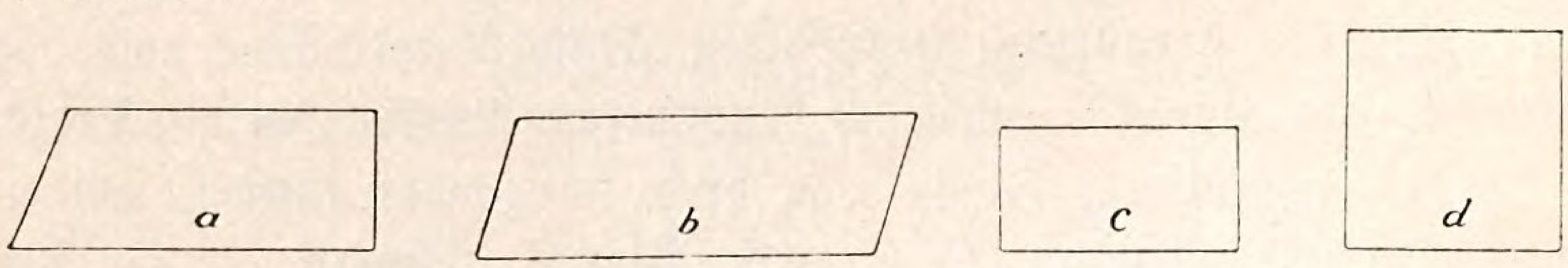
Je nachdem ein **Dreieck** lauter **spitze, einen rechten** oder **einen stumpfen Winkel** enthält heißt es a) ein **spitzwinkeliges,** b) **rechtwinkeliges** oder c) **stumpfwinkeliges Dreieck.**



Je nachdem ferner **ein Dreieck gleiche Seiten** oder **ungleiche Seiten** hat, heißt es a) ein **gleichseitiges** oder b) **ungleichseitiges Dreieck.** Sind endlich in einem **Dreiecke zwei Seiten einander gleich,** so heißt dasselbe c) ein **gleichschenkliges Dreieck.**



Ein Viereck mit einem Paar gleichlaufender (paralleler) Seiten heißt a) **Trapez; ein Viereck mit je zwei parallelen Seiten** heißt b) ein **Parallelogramm. Hat dieses gleiche (rechte) Winkel** so heißt es c) **Rechteck, sind überdieß auch die Seiten gleich,** d) **Quadrat.**



Jede Seite einer geradlinigen Figur kann als **Grundlinie (Basis)** betrachtet werden.

Unter **Höhe** versteht man beim Dreiecke die Entfernung der Grundlinie von dem gegenüberliegenden Ecke und beim Parallelogramm von der gegenüberliegenden Seite. Am Quadrat und Rechteck kann man je zwei in einem Ecke zusammenstoßende Seiten als **Grundlinie** und **Höhe, Länge** und **Breite** betrachten.

Bei Berechnung einer Fläche kommen 2 Fragen in Betracht.

1) Wie groß ist der Umfang der Fläche?

2) Wie groß ist der Inhalt derselben?

ad. 1. Beispiele.

1) Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen Seiten 3 m, 6 m und 5 m lang sind?

Umfang des Dreieckes = 3 m + 6 m + 5 m = 14 m.

Wie groß ist der Umfang eines Viereckes, dessen Seiten 7 m, 5 m, 9 m und 4 m lang sind?

Umfang des Viereckes = 7 m + 5 m + 9 m + 4 m = 25 m.

Hieraus folgt:

Der Umfang (Perimeter) einer Fläche ist gleich der Summe der begrenzenden Seiten (Linien).

2) Wie groß ist der Umfang eines Quadrates, dessen Seite 6 m lang ist?

Umfang des Quadrates = 6 m + 6 m + 6 m + 6 m = 24 m

oder

Umfang des Quadrates = 4 . 6 m = 24 m.

Hieraus folgt:

Der Umfang eines Quadrates ist gleich der Summe aller vier Seiten oder gleich der vierfachen Quadratseite.

3) Wie groß ist der Umfang eines Parallelogrammes, dessen eine Seite 6 m und dessen andere Seite 4 m lang ist?

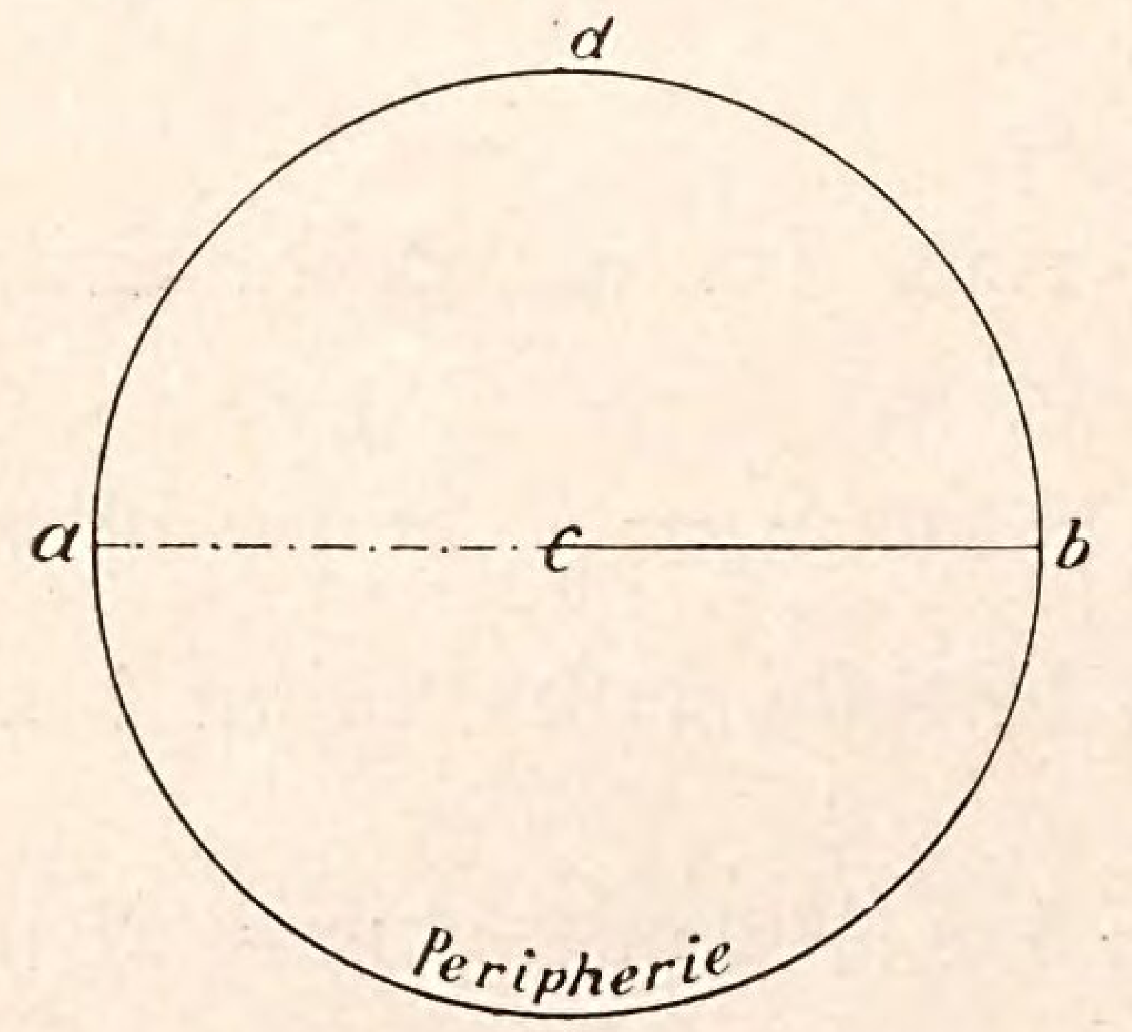
Umfang des Parallelogrammes = (6 + 4) . 2 = 10 m . 2 = 20 m.

Hieraus folgt:

Der Umfang des Rechteckes (Parallelogrammes) ist gleich der doppelten Summe zweier anstoßender Seiten.

Eine Kreisfläche ist eine Fläche, welche begrenzt ist von einer krummen Linie (**Kreisumfang** oder **Peripherie**), deren sämtliche Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte (**Mittelpunkt** oder **Centrum**) gleichweit entfernt sind. Die Entfernung eines Punktes der Peripherie vom Mittelpunkt heißt **Radius** oder **Halbmesser.**

Verlängert man einen Radius über das Centrum hinaus bis zur Peripherie, so erhält man einen **Durchmesser. Der Durchmesser ist demnach gleich dem doppelten Radius.**



Linie b C = Radius

Linie a b = Durchmesser

C = Centrum oder Mittelpunkt

b d a b = Peripherie oder Umfang des Kreises.

Beispiel.

Wie groß ist der Umfang des Kreises, dessen Radius 7 m hat?

Umfang des Kreises = Durchmesser . 3,14

Durchmesser = 2 . Radius

folglich

Umfang des Kreises = 2 . 7 . 3,14 = 43,96 m.

Anm. Abkürzungen. r = Radius oder Halbmesser.
d = Durchmesser.
c = Centrum oder Mittelpunkt.
p = Peripherie oder Umfang.

Hieraus folgt:

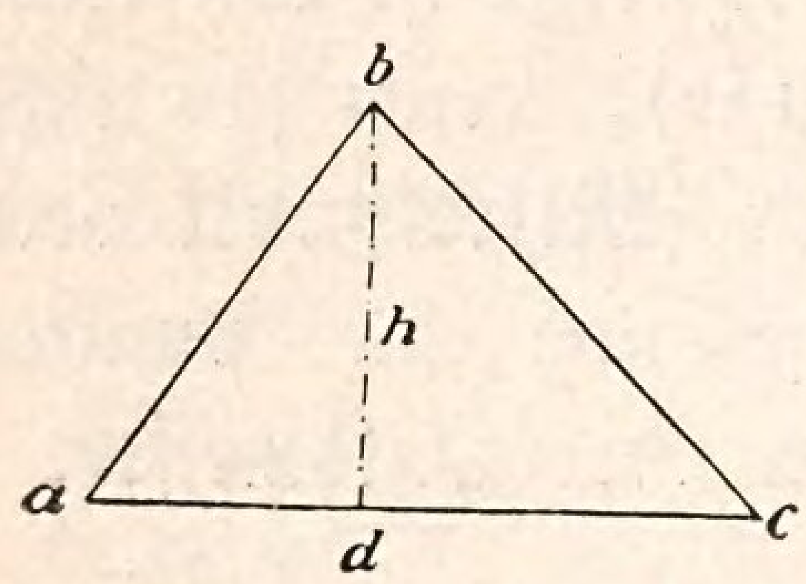
Den Umfang oder die Peripherie eines Kreises findet man, wenn man den Durchmesser 3,14 (der sogenannten Ludolphine) multipliziert.

ad II. **1. Dreieck.**

Z. B. Welches ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie 6 m und dessen Höhe 5 m ist?

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ qm}.$$

Hieraus folgt:



Der Inhalt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

Wenn also g = Grundlinie, h = Höhe und F = Flächeninhalt ist, so lautet die Formel:

$$F = \frac{g \cdot h}{2}$$

2. Viereck.

Beispiele.

Wie groß ist der Inhalt eines Quadrates, dessen Seite 10,5 m ist?

$$F = 10{,}5 \,.\, 10{,}5 \text{ (qm)} = 110{,}25 \text{ qm}$$

Welchen Flächeninhalt hat eine Thüre (Rechteck), welche 2 m hoch und $1\frac{1}{4}$ m breit ist?

$$F = 2 \,.\, 1\tfrac{1}{4} \text{ (qm)} = \tfrac{2}{1} \,.\, \tfrac{5}{4} = \tfrac{10}{4} = 2\tfrac{1}{2} = 2{,}5 \text{ qm.}$$

Welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm von 17,6 m Grundlinie und 15,3 m Höhe?

$$F = 17{,}6 \,.\, 15{,}3 = 269{,}28 \text{ qm.}$$

Es sei der Inhalt eines Viereckes nach der obigen Figur zu berechnen. Man teilt das Viereck a b c d in 2 Dreiecke durch die gerade b c, die man zugleich als gemeinsame Grundlinie der beiden Dreiecke betrachtet.

b c sei nun 10,5 m lang; von den beiden gegenüberliegenden Ecken d und a sei die Grundlinie und zwar von d 4,5 m, von a 6,7 m entfernt, folglich

$$F = \frac{10{,}5 \,.\, 4{,}5}{2} + \frac{10{,}5 \,.\, 6{,}7}{2} + \frac{10{,}5}{2}(4{,}5 + 6{,}7) = 5.25 \,.\, 11{,}2 = 58{,}8 \text{ qm.}$$

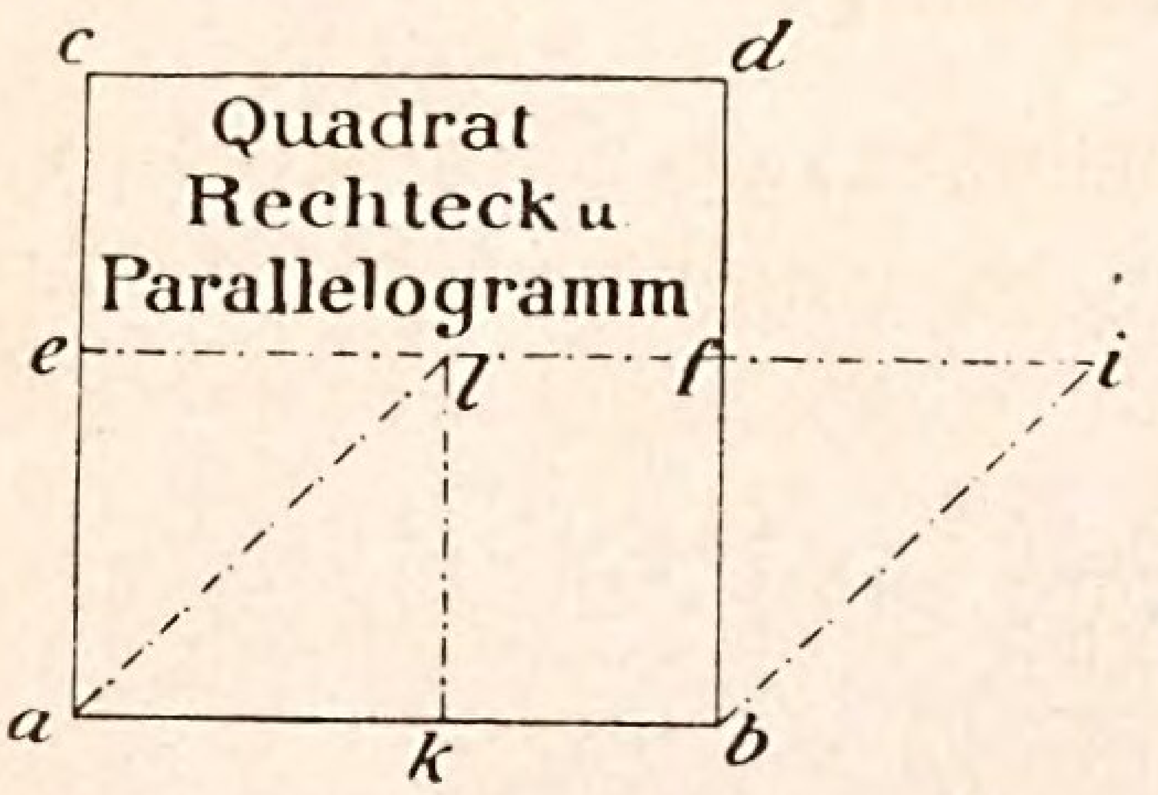
Die größere Parallele eines Trapezes ist 97,5 m, die kleinere 38 m und die Höhe desselben 14 m; wie groß ist sein Inhalt?

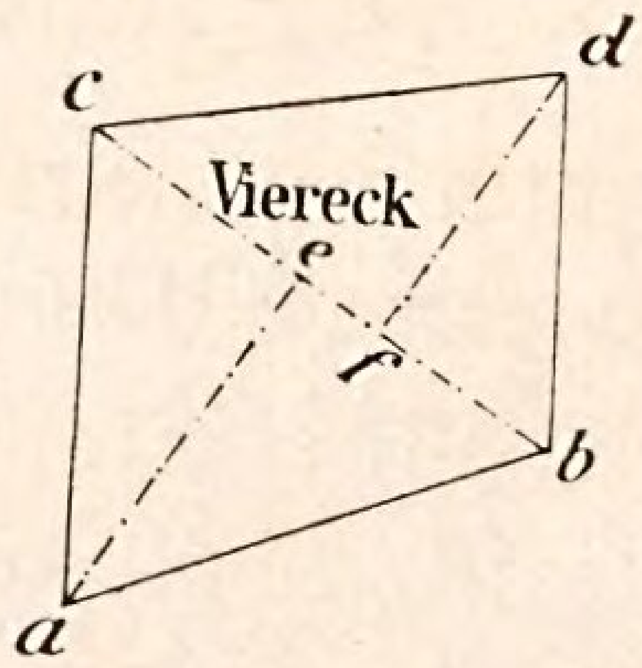
$$F = \frac{14}{2}(97{,}5 + 38) = 7 \,.\, 135{,}5 = 948{,}5 \text{ qm.}$$

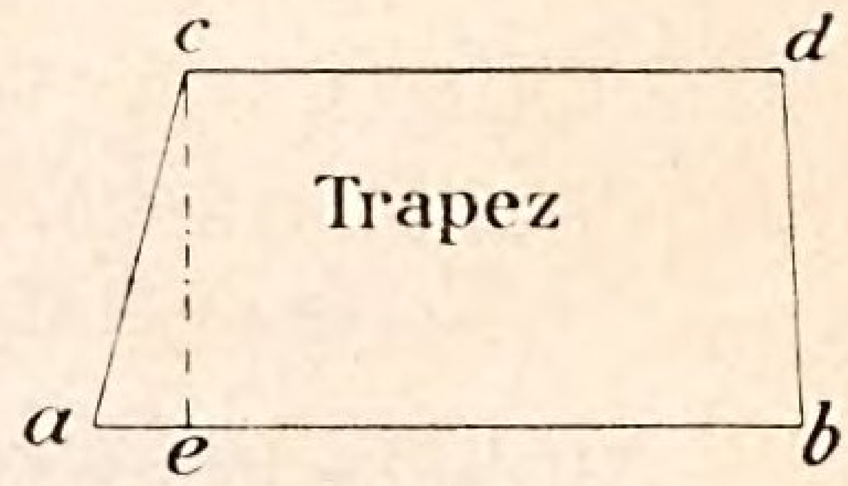
Hieraus folgt:

Der Inhalt eines Quadrates, eines Rechteckes oder eines Parallelogramms wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert. Der Inhalt eines Vierecks überhaupt wird gefunden, wenn man das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, folglich ist der **Inhalt eines Vierecks gleich der Summe zweier Dreiecke.** Der Inhalt eines Trapezes ist analog gleich dem Produkte

aus der Summe der beiden parallelen Seiten und deren halben Abstande (Höhe).







Also Quadrat a b c d $= ab \,.\, ac$ (g . h) $= ab \,.\, ab = ab^2$

Rechteck a b e f $= ab \,.\, ae$ (g . h)

Parallelogramm a b l i $= ab \,.\, kl$ (g . h)

Viereck a b c d $= \frac{bc \,.\, ae}{2} + \frac{bc \,.\, df}{2} = \frac{bc}{2} \,.\, (ae + df)$

Trapez a b c d $= \frac{ce}{2} \,.\, (ab + cd)$.

3. Kreis.

Beispiel.

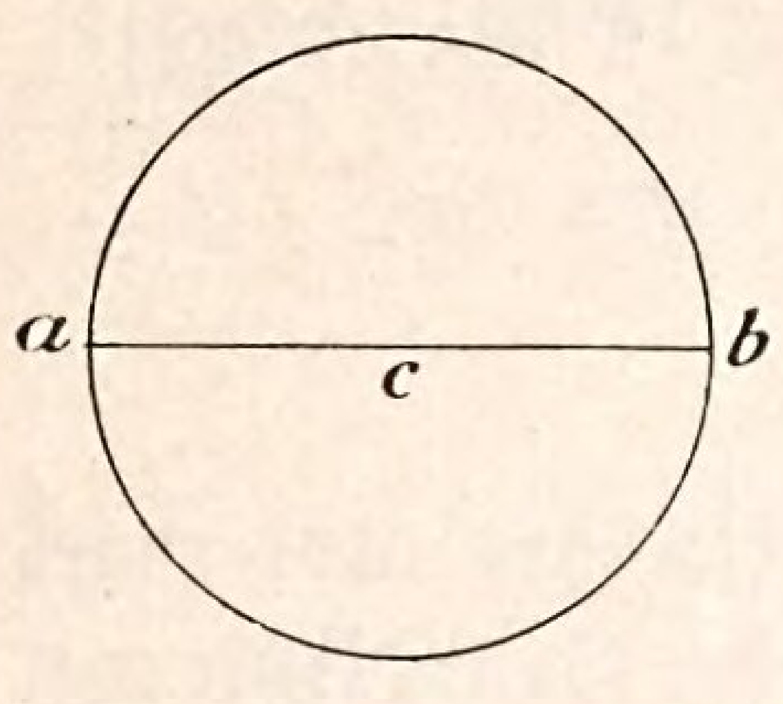
Welchen Flächeninhalt hat ein runder Tisch, dessen Durchmesser 78 cm hat?

$$\text{Radius} = \frac{78}{2} = 39 \text{ cm}$$

$$F = 39 \,.\, 39 \,.\, 3{,}14 = 4775{,}94 \text{ qcm.}$$

Anm. Wenn der Flächeninhalt bekannt ist und daraus eine Seite bestimmt werden soll, so geschieht dies durch Division mit den übrigen bekannten Teilen in den Flächeninhalt.

Hieraus folgt:



Um den **Inhalt eines Kreises** zu finden, denkt man sich den Kreis in unendlich viele Dreiecke zerlegt und zwar vom Mittelpunkt des Kreises aus. Die Summe der Grundlinie dieser Dreiecke ist gleich der Peripherie des Kreises, während der Radius des Kreises die gemeinsame Höhe der Dreiecke ist; **also ist der Inhalt des Kreises gleich der Peripherie multipliziert mit dem halben Radius.**

Die Peripherie ist gleich $2 \,.\, r \,.\, 3{,}14$; folglich

$$F = r \,.\, r \,.\, 3{,}14 = r^2 \,.\, 3{,}14.$$

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 120—126.

b) Körperberechnung.

Unter Körper versteht man die Ausdehnung nach 3 Richtungen. Die Seiten eines Körpers sind Flächen, die Linien, nach welchen sich zwei Seitenflächen schneiden, heißen Kanten, die Schnittpunkte dreier oder mehrerer Seitenflächen heißen die Ecken des Körpers.

Je nach der Beschaffenheit und Lage der begrenzenden Flächen nennt man einen Körper a) Würfel, b) Prisma, c) Cylinder, d) Pyramide, e) Kegel, f) Kugel.

a) Der Würfel ist ein Körper, dessen Seitenflächen gleiche Quadrate sind, die auf einander senkrecht stehen.

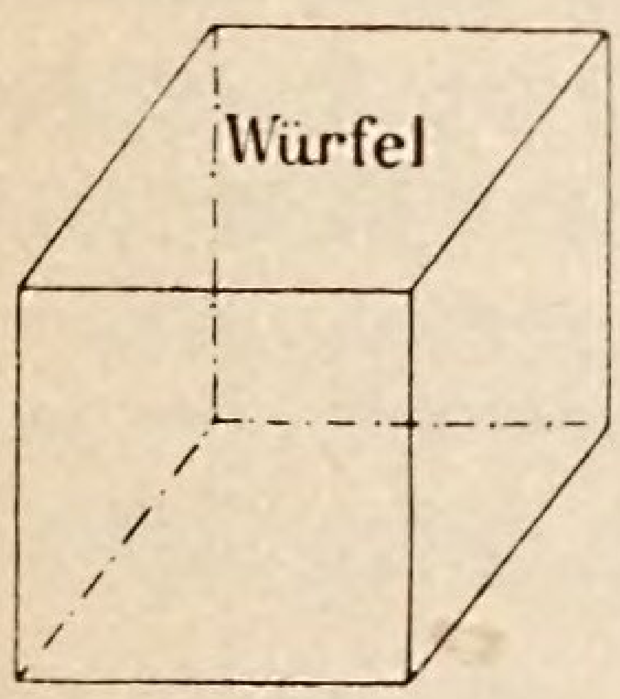
b) Das Prisma ist ein Körper, in dem je zwei gegenüberliegende Seitenflächen parallel sind.

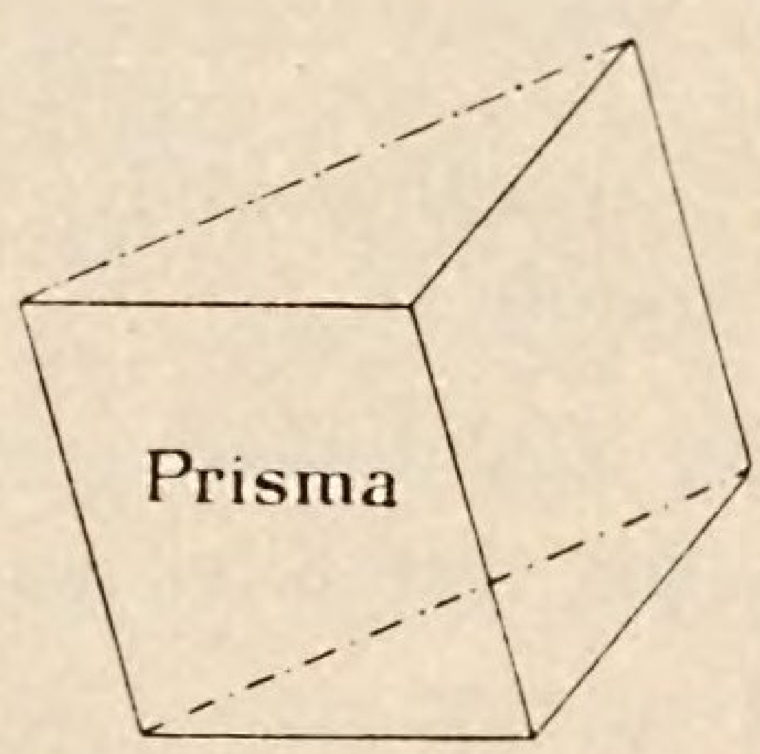
c) Der Cylinder (Walze) ist ein Körper (Prisma), dessen Grundfläche und gegenüberliegende Deckfläche Kreise sind.

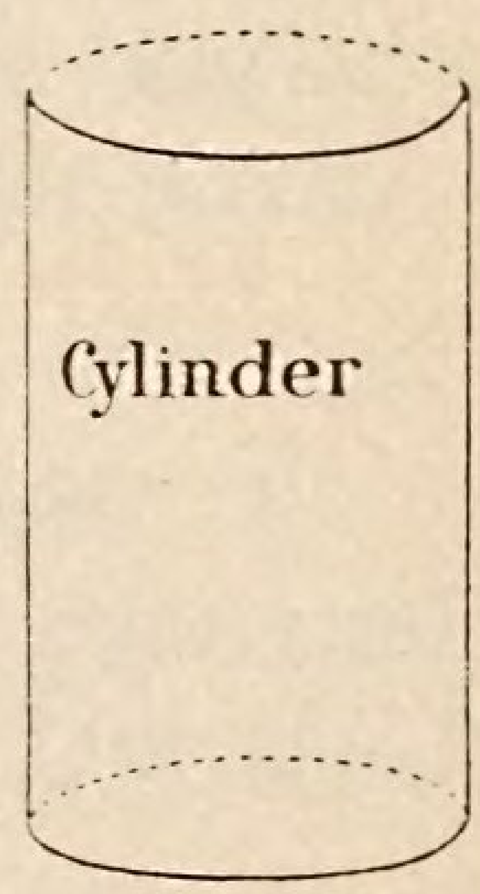
d) Die Pyramide ist ein Körper, dessen Seitenflächen sich in einem der Grundfläche gegenüberliegenden Punkte (Spitze) schneiden.

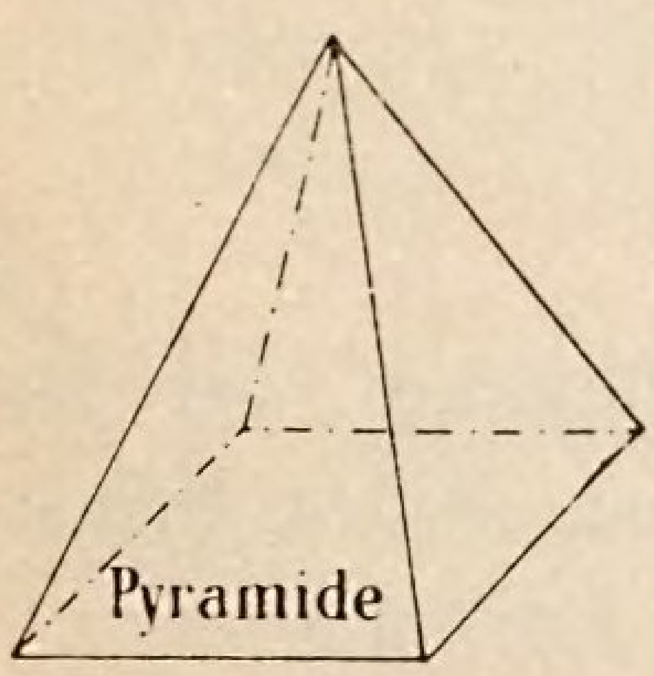
e) Der Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist.

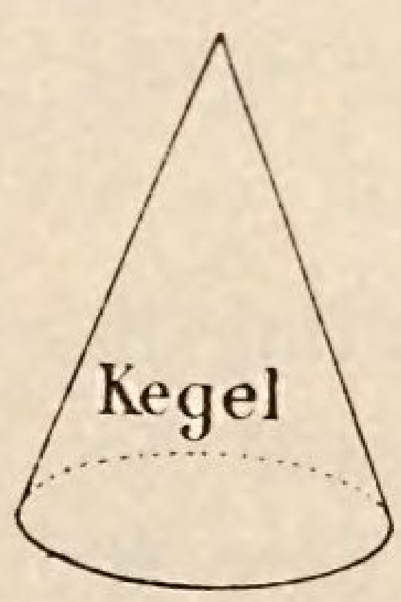
f) Die Kugel ist ein Körper, dessen Oberfläche die Eigenschaft hat, daß alle ihre Punkte von einem innerhalb gelegenen Punkte (Mittelpunkt, Zentrum) gleichweit entfernt sind.

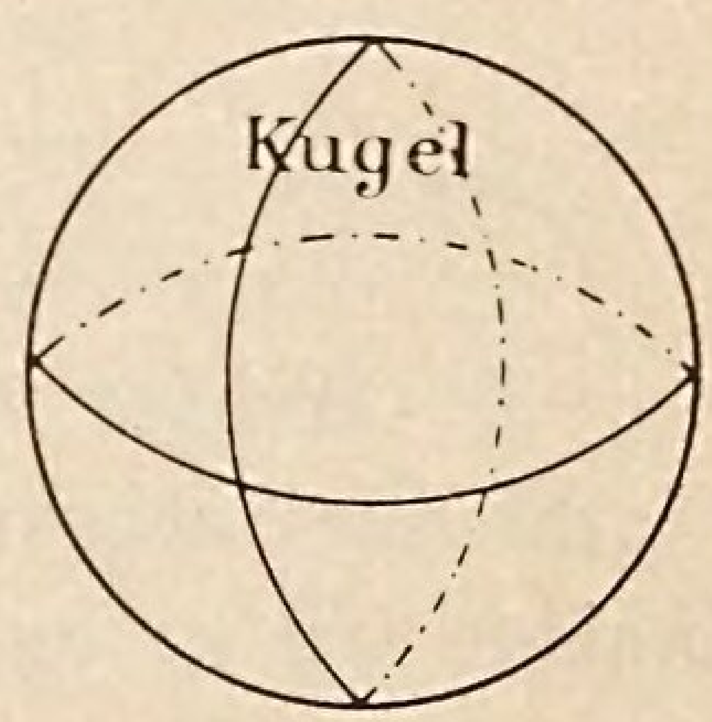












Der Umfang (Oberfläche) eines Körpers ist gleich der Summe der begrenzenden Flächen.

C = Kubikinhalt
F = Grundfläche (Länge und Breite)
l = Länge
b = Breite
h = Höhe
r = Radius.

1) Welches ist der Kubikinhalt eines Würfels, der 0,5 m hoch ist?

$$C = l \,.\, b \,.\, h.$$
$$C = 0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m$$
$$= 0{,}25\ qm \,.\, 0{,}5\ m$$
$$= 0{,}125\ cbm.$$

2) Welches ist der Kubikinhalt eines Prismas, das 1,5 m hoch ist und dessen Grundfläche 2,2 m lang und 1,8 m breit ist?

$$C = l \,.\, b \,.\, h.$$
$$C = 1{,}5\ m \,.\, 2{,}2\ m \,.\, 1{,}8\ m$$
$$= 3{,}3\ qm \,.\, 1{,}8\ m$$
$$= 5{,}94\ cbm.$$

3) Welches ist der Kubikinhalt einer vierseitigen Pyramide, die 132 m hoch ist und deren Grundfläche 250 m lang und 250 m breit ist?

$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, h \,.\, F.$$
$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, (132\ m \,.\, 250\ m \,.\, 250\ m)$$
$$= \tfrac{1}{3} \,.\, (132\ m \,.\, 62500\ qm)$$
$$= \tfrac{1}{3} \,.\, 8250000\ cbm$$
$$= 2750000\ cbm.$$

4) Welches ist der Kubikinhalt eines Baumstammes, der die Form eines Cylinders hat, der 6 m hoch ist und dessen Radius 0,5 m hat?

$$C = r^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, h$$
$$= 0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m \,.\, 3{,}14 \,.\, 6\ m$$
$$= 0{,}25\ qm \,.\, 3{,}14 \,.\, 6\ m$$
$$= 4{,}71\ cbm.$$

5) Welches ist der Kubikinhalt eines Baumstammes, der die Form eines abgestumpften Kegels hat, der 6 m hoch, dessen kleiner Radius 0,2 m und dessen großer Radius 0,5 m beträgt?

Anm. R = Radius der großen Kreisfläche des abgestumpften Kegels.
r = Radius der kleinen Kreisfläche desselben.

$$C = \frac{1}{3} \cdot h \cdot 3{,}14 \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

$$C = \frac{1}{3} \cdot 6\ m \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}5\ m \cdot 0{,}5\ m + 0{,}2 \cdot 0{,}2\ m + 0{,}5\ m \cdot 0{,}2)$$

$$= 6{,}28\ m \cdot (0{,}25\ qm + 0{,}04\ qm + 0{,}1\ qm)$$

$$= 6{,}28\ m \cdot 0{,}39\ qm$$

$$= 2{,}4492\ cbm.$$

6) **Der Inhalt einer Kugel** ist

$$\frac{4}{3}\ r^3 \cdot 3{,}14$$

Welches ist der Kubinhalt der Erde, wenn man als die Länge des Durchmessers 1720 Meilen annimmt?

$$C = \frac{4}{3} \cdot 860 \cdot 860 \cdot 860 \cdot 3{,}14 = 2662954453\tfrac{1}{3}\ cbm.$$

(Die Oberfläche der Kugel ist gleich $4 \cdot r^2 \cdot 3{,}14$ oder $d^2 \cdot 3{,}14$)

Anm. Sowohl bei der Flächen- und Körperberechnung ist die Entwicklung der Formeln für die Berechnung der einzelnen Seiten dem Unterrichte vorbehalten. Überhaupt ist dieser Abschnitt nur für jene Schüler berechnet, welche später nicht mehr Gelegenheit haben, sich eingehender mit Planimetrie und Stereometrie zu beschäftigen.

Fragen und Aufgaben.

Aufgabensammlung Seite 126 bis 127.

c) Gewichtsberechnung der Körper.

Unter dem spezifischen Gewichte eines Körpers versteht man diejenige Zahl, welche anzeigt, wie vielmal ein Körper schwerer (leichter) ist als ein gleich großes Volumen (gleich großer Rauminhalt) destilliertes Wasser bei 4° Celsius.*)

Das specifische Gewicht des Wassers = 1.

Beispiele.

1) Eine rechteckige Eisenstange ist 1 m 5 dm lang und 8 cm breit, 5 cm dick. Das specifische Gewicht des Eisens ist 7,8. Wie schwer ist die Eisenstange?

$$G = 15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 7{,}8\ (kg)$$

$$= 12 \cdot 0{,}5 \cdot 7{,}8\ kg = 6 \cdot 7{,}8\ kg = 46{,}8\ kg$$ wiegt die Eisenstange.

*) V = Kubikinhalt (Volumen).
G = wirkliches Gewicht.
s = spezifisches Gewicht.

Hieraus folgt:

$$G = V \,.\, s \text{ d. h.}$$

man findet das wirkliche Gewicht eines Körpers in Kilogramm ausgedrückt, wenn man seinen in Kubikdecimetern ausgedrückten Inhalt mit dem specifischen Gewichte seiner Masse multipliziert.*)

2) Eine Bleikugel wiegt 2,27 kg. Das specifische Gewicht des Bleies ist 11,35. Welches ist der Kubikinhalt der Kugel?

$$V = \frac{G}{s} = 2{,}27 : 11{,}35$$

= 227 : 1135 = 0,2 cdm ist der Kubikinhalt der Kugel.
2270
0

Hieraus folgt:

$$V = \frac{G}{s} \text{ d. h.}$$

man findet den körperlichen Inhalt in Kubikdecimetern ausgedrückt, wenn man das durch kg ausgedrückte wirkliche Gewicht durch das specifische Gewicht dividiert.

Fragen und Beispiele.

Aufgabensammlung Seite 128.

12. Verhältnisse und Proportionen.

1. Erklärungen.

Zwei Zahlen lassen sich in Beziehung auf ihre Größe in doppelter Art miteinander vergleichen. Man kann untersuchen:

1) um wieviel,

2) wie vielmal eine Zahl größer ist als die andere.

1) Wenn man untersucht, **um wieviel** die eine Zahl größer ist als die andere, was bekanntlich durch die **Subtraktion** geschieht, so setzt man dieselben in ein **arithmetisches Verhältnis.**

Z. B. 8 — 5 (lies 8 verhält sich arithmetisch zu 5).

*) Der Inhalt muß in Kubikdecimetern ausgedrückt sein, weil 1 cdm destilliertes Wasser bei 4 Celsius 1 kg wiegt.

Das arithmetische Verhältnis ist gleichbedeutend mit einer formellen Differenz. 8 heißt das Vorderglied, 5 das Hinterglied. Je nachdem das Vorderglied kleiner oder größer ist als das Hinterglied, hat man steigende oder fallende Verhältnisse.

Der Wert eines arithmetischen Verhältnisses wird immer bestimmt durch seine Differenz.

Man versteht darunter diejenige Zahl, welche zum Hinterglied addiert das Vorderglied als Summe gibt. (Wirkliche Differenz.)

Die Differenzen aller fallenden arithmetischen Verhältnisse sind positive Zahlen; die Differenzen der steigenden arithmetischen Verhältnisse sind immer negative Zahlen.

Z. B. 8 — 5 Differenz = + 3
5 — 8 „ = — 3

Ein arithmetisches Verhältnis bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man zum Vorderglied und Hinterglied dieselbe Zahl, oder von beiden Zahlen dieselbe subtrahiert.

Z. B. 8 — 5
= (8 + 3) — (5 + 3)
= 11 — 8 Differenz = + 3
8 — 5
= (8 — 3) — (5 — 3)
= 5 — 2 Differenz = + 3

2) Wenn man untersucht, **wie vielmal** eine Zahl größer ist als die andere, was durch die **Division** geschieht, so setzt man die Zahlen in ein **geometrisches Verhältnis.**

Z. B. 8 : 4 (lies 8 verhält sich geometrisch zu 4).

Das geometrische Verhältnis ist also gleichbedeutend mit einem formellen Quotienten.

Der Wert eines geometrischen Verhältnisses wird durch den Exponenten bestimmt; man versteht darunter diejenige Zahl, mit welcher das Hinterglied multipliziert das Vorderglied zum Produkt gibt. (Wirklicher Quotient).

Die Exponenten der fallenden geometrischen Verhältnisse sind immer größer als 1, die der steigenden geometrischen Verhältnisse stets kleiner als 1.

Z. B. 8 : 4 Exponent = 2
4 : 8 „ = $\frac{1}{2}$.

Ein geometrisches Verhältnis bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert. Man kann nach diesem Satze jedes geometrische Verhältnis, in welchem Brüche vorkommen, in ein anderes mit ganzen Zahlen dadurch verwandeln, daß man die Glieder mit dem gemeinschaftlichen Nenner der Brüche multipliziert.

Z. B. $3\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2} = \frac{15}{4} : \frac{22}{4} = 15 : 22.$

2. Arithmetische Proportionen.

Wenn man zwei arithmetische Verhältnisse mit gleicher Differenz durch das Gleichheitszeichen verbindet, so entsteht eine arithmetische Proportion.

Z. B. $24 - 8 = 20 - 4$

24 und 4 sind die äußeren Glieder,
8 und 20 „ „ inneren „
ferner sind 24 und 20 die Vorderglieder,
8 und 14 die Hinterglieder.

Je zwei oder mehrere Vorderglieder und je zwei oder mehrere Hinterglieder heißen homologe (gleichstehende) Glieder.

Hauptsatz.

In einer richtigen arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußeren Glieder gleich der Summe der beiden inneren Glieder.

Z. B. $24 - 8 = 20 - 4$
$24 + 4 = 8 + 20 = 28$

Ein unbekanntes äußeres Glied ist also gleich der Summe der beiden inneren Glieder minus das bekannte äußere Glied.

Z. B. $25 - 23 = 13 - x$
$x = 23 + 13 - 25 = 11$

Eine Proportion, in der die beiden mittleren Glieder einander gleich sind, heißt eine stetige Proportion.

Z. B. $12 - 8 = 8 - 4.$

Das mittlere Glied 8 heißt arithmetisches Mittel zu den äußeren Gliedern. Dasselbe ist immer gleich der halben Summe der gegebenen Zahlen.

$$\text{z. B.}\quad 17 - x = x - 3$$
$$2x = 17 + 3$$
$$x = \frac{17 + 3}{2} = 10.$$

Das arithmetische Mittel zu mehreren Zahlen ist gleich der Summe dieser Zahlen dividiert durch ihre Anzahl.

z. B. Man gebe von folgenden Zahlen: 36, 2, 12, 18, 24, 10 das arithmetische Mittel an:

Das arithmetische Mittel dieser Zahlen

$$= \frac{36 + 2 + 12 + 18 + 24 + 10}{6} = \frac{102}{6} = 17.$$

2) Der höchste Schrannenpreis vom Hektoliter Weizen sei 18 ℳ 80 ₰, der niedrigste 16 ℳ 70 ₰, welches ist der Durchschnittspreis?

$\frac{18{,}8 + 16{,}7}{2} = \frac{35{,}5}{2} = 17{,}75$ ℳ $= 17$ ℳ 75 ₰ ist der Durchschnittspreis des Hektoliters Weizen.

Aufgabensammlung Seite 129.

5. Geometrische Proportionen.

Wenn man zwei geometrische Verhältnisse mit gleichem Exponenten versieht, so entsteht eine geometrische Proportion.

Hauptsatz.

Das Produkt der äußeren Glieder ist gleich dem Produkte der beiden inneren Glieder.

$$3 : 9 = 16 : 48$$
$$2 . 48 = 9 . 16$$
$$154 = 144$$

Es läßt sich jede Proportion als Produktengleichung anschreiben, und umgekehrt läßt sich aus einer Produktengleichung eine Proportion bilden.

$$\text{z. B.}\quad 3 . 15 = 9 . 5$$
$$3 : 9 = 5 : 15.$$

Die Faktoren des einen Produktes geben die äußeren, die des anderen Produktes die inneren Glieder.

Ein unbekannt äußeres Glied ist also gleich dem Produkte

der beiden inneren Glieder dividiert durch das bekannte äußere Glied.

$$6\frac{3}{4} : 3\frac{3}{8} = 6 : x$$

$$x = \frac{3\frac{3}{8} \,.\, 6}{6\frac{3}{4}} = \frac{27 \,.\, 6 \,.\, 4}{8 \,.\, 27} = 3.$$

Eine geometrische Proportion heißt stetig, wenn die beiden mittleren Glieder einander gleich sind.

Z. B. $12 : 6 = 6 : 3$

oder $12 : 6 : 3$

6 ist das geometrische Mittel zwischen 12 und 3.

Das geometrische Mittel ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der beiden bekannten Zahlen.

Anm. Unter der Quadratwurzel einer Zahl versteht man diejenige Zahl, welche mit sich selbst multipliziert, die vorgelegte Zahl gibt.

Z. B.

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{49} = 7$	

Beispiel einer stetigen Proportion:

$$18 : x = x : 8$$
$$x^2 = 8 \,.\, 18 = 144$$
$$x = \sqrt{144} = 12$$

In einer continuierlichen Proportion verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Z. B. $4 : 14 = 8 : 28 = 6 : 21 = 10 : 35$

$$(4 + 8 + 6 + 10) : (14 + 28 + 21 + 35) = 4 : 14$$
$$= 4 : 14$$
$$= 8 : 14$$
$$= 6 : 21$$
$$= 10 : 35$$

Anm. Unter einer continuierlichen Proportion versteht man die Gleichung mehrerer geometrischer Verhältnisse mit gleichen Exponenten. Aus mehreren richtigen Proportionen erhält man eine neue richtige Proportion dadurch, daß man die gleichstehenden Glieder miteinander multipliziert.

$$\begin{array}{rcl} 4 : 2 &=& 12 : 6 \\ 3 : 3 &=& 6 : 9 \\ 5 : 10 &=& 3 : 6 \\ 12 : 4 &=& 9 : 3 \end{array}$$

$$(4 . 2 . 5 . 12) : (2 . 3 . 10 . 4) = (12 . 6 . 3 . 9) : (6 . 9 . 6 . 3)$$

$$480 : 240 = 1944 : 972.$$

Zwei Verhältnisse einem dritten gleich, sind auch unter sich gleich.

Z. B. $16 : 4 = 24 : 6$
$36 : 9 = 24 : 6$

$16 : 4 = 36 : 9$

Sind in 2 Proportionen je 3 Glieder einander gleich, so sind auch die vierten Glieder einander gleich.

Z. B. $16 : 8 = x : 24$
$16 : 8 = y : 24$

$$x = y = \frac{24 . 16}{8} = 48.$$

Das unbekannte Glied einer Proportion nennt man die 4. mittlere Proportionale zu den drei gleichbenannten Zahlen.

Beispiele der geometrischen Proportion.

a) $63 : 21 = 45 : x$

$$x = \frac{21 . 45}{63} = \frac{3 . 45}{9} = 15.$$

b) $7,2 : 63 = 0,88 : z$

$$z = \frac{63 . 0,88}{7,2} = \frac{7 . 0,88}{0,8} = \frac{7 . 0,11}{0,1} = \frac{7 . 1,1}{1} = 7,7$$

c) $9\frac{1}{3} : 4\frac{2}{7} = 5\frac{1}{4} : y$

$2\frac{5}{8} : 1\frac{1}{6} = y : x$

$$(9\frac{1}{3} . 2\frac{5}{8}) : (4\frac{2}{7} . 1\frac{1}{6}) = (5\frac{1}{4} . y) : (y . x)$$

$$= (\frac{28}{3} . \frac{21}{8}) : (\frac{30}{7} . \frac{7}{6}) = 5\frac{1}{4} : x$$

$$x = \frac{\frac{30}{7}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{21}{4}}{\frac{28}{3}\cdot\frac{21}{8}} = \frac{\overset{15}{30}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{21}\cdot\cancel{3}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{7}\cdot\underset{2}{\cancel{6}}\cdot\cancel{4}\cdot\underset{14}{\cancel{28}}\cdot\cancel{21}} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$$

Aufgabensammlung Seite 129—131.

Ustrich, Friedrich

Lehrbuch der Arithmetik für Gymnasial-, Real-, Bürger- und gewerbliche Fortbildungs-Schulen

München 1895